1. A tízes számrendszerben használt számjegyek:

A tízes számrendszerben a következő számjegyeket használjuk: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ezzel a tíz számjeggyel a tízes számrendszerben bármilyen nagy szám felírható.

2. A tízes számrendszer helyiérték-táblázata:

EGÉSZEK												TIZEDESTÖRTEK					
SZÁZMILLIÁRDOK	TÍZMILLIÁRDOK	MILLIÁRDOK	SZÁZMILLIÓK	TÍZMILLIÓK	MILLIÓK	SZÁZEZRESEK	TÍZEZRESEK	EZRESEK	SZÁZASOK	TÍZESEK	EGYESEK	TIZEDEK	SZÁZADOK	EZREDEK	TÍZEZREDEK	SZÁZEZREDEK	MILLIOMODOK

3. A számjegy helyi-, alaki- és valódi értéke:

Minden számjegynek van helyi-, alaki- és valódi értéke.
Alaki érték: A számjegy alakja határozza meg. A számjegyeket az alaki értékük különbözteti meg egymástól.
Helyi érték: A helyi érték a számjegynek a helyiérték-táblázatban elfoglalt helye.
Valódi érték: Az alaki- és helyi érték szorzata a számjegy valódi, tényleges értéke.

Példa:

1. Vizsgáljuk meg az aláhúzott számjegyet!

$$\begin{array}{ccccc} T & E & sz & t & e \\ 8 & \underline{5} & 0 & 7 & 2 \end{array}$$

Alaki érték: öt (5) — Figyeld az alakját!
Helyi érték: ezer (1000) — Ez a számjegy a helyiérték-táblázat Ezres oszlopában van.
Valódi érték: ötezer (5000) — Öt darab ezres ennyit ér valójában. 1000*5=5000

2. Vizsgáljuk meg az aláhúzott számjegyet!

$$\begin{array}{ccccc} T & E & sz & t & e \\ 8 & 5 & 0 & \underline{7} & 2 \end{array}$$

Alaki érték: hét (7) — Figyeld az alakját!
Helyi érték: tíz (10) — Ez a számjegy a helyiérték-táblázat tízes oszlopában van.
Valódi érték: hetven (70) — Hét darab tízes ennyit ér valójában. 10*7=70

4. A szám fölírása összeg alakban a számjegy alaki és helyi értékének segítségével:

Minden szám egyértelműen fölírható a számjegyek alaki- és helyi- értéke segítségével összeg alakban.

Példa:

1. 3209 = **1000 * 3 + 100 * 2 + 10 * 0 + 1 * 9**
2. 452265 = **100000 * 4 + 10000 * 5 + 1000 * 2 + 100 * 2 + 10 * 6 + 1 * 5**
3. 8250406 = **1000000 * 8 + 100000 * 2 + 10000 * 5 + 1000 * 0 + 100 * 4 + 10 * 0 + 1 * 6**

5. Nagy számok kiolvasása:

Nagy egész számok kiolvasásakor célszerű a helyiérték-táblázat oszlopaiból az egyesektől kezdve hármas csoportokat alkotni. Mindig csak a csoportban lévő számot kell kiolvasni, majd hozzámondjuk a csoport nevét. Ez alól csak az egyesek csoportja a kivétel, mert ennek a csoportnak nem mondjuk ki a nevét. A kiolvasást természetesen balról jobbra haladva végezzük.

A csoportok:

Milliárd			**Millió**			**Ezer**			**Egyes**		
SZMd	TMd	Md	SZM	TM	M	SZ	T	E	sz	t	e

Példa: 1.

Olvassuk ki a következő számot!

3 6 0 0 7 0 0 3 9 0 0

Első nekifutásra nem is olyan könnyű. Próbálkozzunk a csoportosítással!

0 3 6	0 0 7	0 0 3	9 0 0
Milliárd	Millió	Ezer	Egyes

Csak a csoporton belüli számot figyeljük. Így mindig legfeljebb három számjegyből álló számot kell kiolvasni. Hozzámondjuk a csoportnevet, és már kész is.

Harminchatmilliárd hétmillió háromezer kilencszáz

Összeolvasva:

Harminchatmilliárd-hétmillió-háromezer-kilencszáz

2. Olvassuk ki a következő számot!

8 4 6 0 0 0 0 0 7 2 0 3

Csoportosítsunk most is!

8 4 6	0 0 0	0 0 7	2 0 3
Milliárd	Millió	Ezer	Egyes
Nyolcszáznegyvenhatmilliárd		hétezer	kétszázhárom

A milliós csoport most üres, azzal nem kell foglalkozni.

Összeolvasva:

Nyolcszáznegyvenhatmilliárd-hétezer-kétszázhárom

6. Számok helyesírása:

A mindennapi életben előfordul, hogy a számokat nem számjegyekkel, hanem betűkkel kell leírni. Nem árt, ha tudjuk, hogyan kell helyesen írni.

A számokat kétezerig egybeírjuk. A kétezernél nagyobb számoknál az egyesektől kezdve hármas csoportokat alkotunk. A csoportban lévő számot és a csoport nevét egybeírjuk, a csoportok közé kötőjelet teszünk. (Az egyesek csoportjának a nevét nem írjuk ki.)

Példa:

1894
Ezernyolcszázkilencvennégy

4 006 210
Négymillió-hatezer-kétszáztíz

65 436 047 096
Hatvanötmilliárd-négyszázharminchatmillió-negyvenhétezer-kilencvenhat

80 000 500 002
Nyolcvanmilliárd-ötszázezer-kettő

7. Az összeadásban szereplő számok elnevezése:

$$a + b = c$$

összeadandók (tagok) — a, b; összeg — c

8. Az összeadás tulajdonságai:

Az összeadandók sorrendje tetszés szerint felcserélhető, az összeg nem változik.

$$a + b = b + a$$

$$a + b + c + d = b + a + d + c$$

Példa:

a. $5 + 7 = 12$ $7 + 5 = 12$

b. $4 + 3 + 5 + 2 = 14$ $3 + 4 + 2 + 5 = 14$ $5 + 4 + 2 + 3 = 14$

Az összeadandók tetszés szerint csoportosíthatók, - zárójelezhetők -, az összeg nem változik. A zárójel el is hagyható.

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$(a + b) + c = a + b + c$$

$$a + (b + c + d) = a + (b + c) + d$$

Példa:

a. $5 + (7 + 3) = 15$ $(5 + 7) + 3 = 15$

b. $4 + (3 + 5 + 2) = 14$ $4 + (3 + 5) + 2 = 14$ $(4 + 3 + 5) + 2 = 14$

9. A kivonásban szereplő számok elnevezése:

$$a - b = c$$

kisebbítendő — a; kivonandó — b; különbség — c

10. A szorzásban szereplő kifejezések elnevezése:

Egyenlő tagok összeadását felírhatjuk rövidebben, szorzat alakban is.

Példa:

$5 + 5 + 5 + 5 = \mathbf{5 \cdot 4}$

$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = \mathbf{7 \cdot 9}$

$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = \mathbf{3 \cdot 11}$

$$a \cdot b = c$$

szorzandó szorzó szorzat

(tényezők)

11. A szorzás tulajdonságai:

A szorzótényezők sorrendje tetszés szerint felcserélhető, a szorzat nem változik.

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d = b \cdot a \cdot d \cdot c$$

Példa:

a. $5 \cdot 7 = 35$ $\quad 7 \cdot 5 = 35$

b. $4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 = 120$ $\quad 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 120$ $\quad 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 120$

A szorzótényezők tetszés szerint csoportosíthatók, - zárójelezhetők -, a szorzat nem változik. A zárójel el is hagyható.

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$$

$$a \cdot (b \cdot c \cdot d) = a \cdot (b \cdot c) \cdot d$$

Példa:

$4 \cdot (3 \cdot 5) \cdot 2 = 120$ $\quad 3 \cdot (4 \cdot 2 \cdot 5) = 120$ $\quad 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 = 120$

12. A nulla szerepe a szorzásban:

A szorzat akkor és csak akkor nulla, ha legalább az egyik szorzótényező nulla.

1. $a \cdot b \cdot c \cdot d = 0$

Mivel a szorzásunk végeredménye nulla, ebből következik, hogy az **a, b, c, d** tényezők közül legalább az egyik nulla.

2. $a \cdot b \cdot c \cdot 0 \cdot d = e$

Mivel a szorzótényezők között szerepel a nulla, ezért az **a, b, c, d** tényezők értékétől függetlenül a szorzat értéke nulla (e = 0).

Példa:

$$23 \cdot 98 \cdot 0 \cdot 453 \cdot 73 = 0$$

13. Az osztásban szereplő számok elnevezése:

$$a : b = c$$

$$\boxed{d}$$

osztandó osztó hányados

maradék

14. Nulla osztása nullától különböző számmal.

Ha nullát osztunk egy nullától különböző számmal, a hányados mindig nulla.

$0 : a = 0 \qquad a \neq 0$

Ellenőrizzünk:

$a * 0 = 0$

Megkaptuk az osztandót, tehát jól osztottunk.

Példa:

$0 : 21 = 0$

$0 : 87243 = 0$

$0 : (-54) = 0$

$0 : 7{,}84 = 0$

$0 : \frac{2}{7} = 0$

15. Az osztó nulla.

Ha az **osztó nulla**, az osztás értelmetlen.

a : 0 = értelmetlen

Példa:

12 : 0 = értelmetlen

56243 : 0 = értelmetlen

0 : 0 = értelmetlen

(-9) : 0 = értelmetlen

Ha egy több műveletet tartalmazó példában van olyan osztás, ahol az osztó nulla, akkor a feladat értelmetlen.

Példa:

64 : 8 – 21 * 5 – (23 + 9) * 4 – **65 : 0** + 9 * 5 = értelmetlen

16. Műveleti sorrend, ha nincs zárójel:

1. LÉPÉS	A hatványozásokat, gyökvonásokat végezzük el. (ezeket a műveleteket 7. 8. osztályban tanuljuk.) Lehet balról jobbra haladva elvégezni ezeket a műveleteket.
2. LÉPÉS	Szorzás, osztás. Lehet balról jobbra haladva elvégezni ezeket a műveleteket.
3. LÉPÉS	Összeadás, kivonás. Lehet balról jobbra haladva elvégezni ezeket a műveleteket.

Ha sok műveletből áll a feladat, akkor érdemes minden lépés után újra leírni a megmaradó műveleteket. Így könnyebben követhető lesz a megoldásunk.

Példa: $18 - 5 * 2 + 3 * 3 - 20 : 4 * 3 + 36 : 6 - 24 : 8 + 7 =$

Ebben a feladatban nincs gyökvonás, és hatványozás, ezért a szorzással, osztással kezdünk:

= 18 – **10** + **9** – **15** + **6** – **3** + 7 =

Következik az összeadás, kivonás. Haladhatunk balról jobbra.:

= 12

17. A zárójelek fajtái:

( ) kis zárójel, vagy kerek zárójel

[ ] szögletes zárójel

{ } kapcsos zárójel

18. Műveleti sorrend, ha van zárójel:

1. LÉPÉS	A kis zárójelek között lévő műveleteket végezzük el.
2. LÉPÉS	A szögletes zárójelek között lévő műveleteket végezzük el.
3. LÉPÉS	A kapcsos zárójelek között lévő műveleteket végezzük el.
4. LÉPÉS	A megmaradt műveletek elvégzése a műveleti sorrend szabályai szerint.

A zárójelen belül a műveleti sorrend szabályai érvényesek.

Ha több azonos zárójel van a feladatban, akkor célszerű ezeket balról jobbra sorra venni.

Megoldható úgy is a feladat, hogy minden lépés után a feladatot újra leírjuk, miközben minden zárójel „egyet visszalép". Például a kapcsosból szögletes lesz. Így végül mindig a kis zárójelek közötti műveletekkel kell foglalkoznunk. Kezdő feladatmegoldónak ez a módszer megkönnyítheti a munkáját.

Példa:

32 : 8 * 5 – {40 – [27 : 9 + (4 + 1) * 3 – (15 + 3 * 2) : 3] – 4 * 6}=

Az első lépésben elvégezzük a kis zárójelben lévő műveleteket, és „visszaléptetjük" a zárójeleket.

= 32 : 8 * 5 – [40 – (27 : 9 + **5** * 3 – **21** : 3) – 4 * 6] =

A második lépésben az eredetileg szögletes zárójelben lévő műveletek következnek. A visszaléptetés miatt ezek most kis zárójelben vannak. Ne feledkezzünk meg most sem a visszaléptetésről!

= 32 : 8 * 5 – (40 – **11** – 4 * 6) =

A harmadik lépésben az eredetileg kapcsos zárójelben lévő műveletek következnek. A visszaléptetés miatt ezek most kis zárójelben vannak.

= 32 : 8 * 5 – **5** =

Most már nincs zárójel. Alkalmazzuk a zárójel nélküli műveleti sorrend szabályait!

A végeredmény:

= $\underline{\underline{15}}$

19. Összeg szorzása egy számmal:

a. Elvégezzük az összeadást, majd az összeget szorozzuk a szorzóval. (A műveleti sorrendnek megfelelően járunk el.)

Példa:

(6 + 4 + 3 + 10) * 2 = 23 * 2 = 46

b. Összeget úgy is szorozhatunk egy számmal, hogy mindegyik tagot szorozzuk a szorzóval, majd a kapott szorzatokat összeadjuk.

Példa:

(6 + 4 + 3 + 10) * 2 = 6 * 2 + 4 * 2 + 3 * 2 + 10 * 2 = 12 + 8 + 6 + 20 = 46

20. Összeg osztása egy számmal:

a. Elvégezzük az összeadást, majd az összeget osztjuk az osztóval. (A műveleti sorrendnek megfelelően járunk el.)

Példa:

(6 + 4 + 2 + 8) : 2 = 20 : 2 = 10

b. Összeget úgy is oszthatunk egy számmal, hogy mindegyik tagot osztjuk az osztóval, majd a kapott hányadosokat összeadjuk.

Példa:

(6 + 4 + 2 + 8) : 2 = 6 : 2 + 4 : 2 + 2 : 2 + 8 : 2 = 3 + 2 + 1 + 4 = 10

21. Szorzat szorzása, osztása egy számmal:

a. Elvégezzük a szorzást, majd a szorzatot szorozzuk a szorzóval, (osztjuk az osztóval).

Példa:

(6 * 4 * 3 * 10) * 2 = 720 * 2 = 1440 (6 * 4 * 3 * 10) : 2 = 720 : 2 = 360

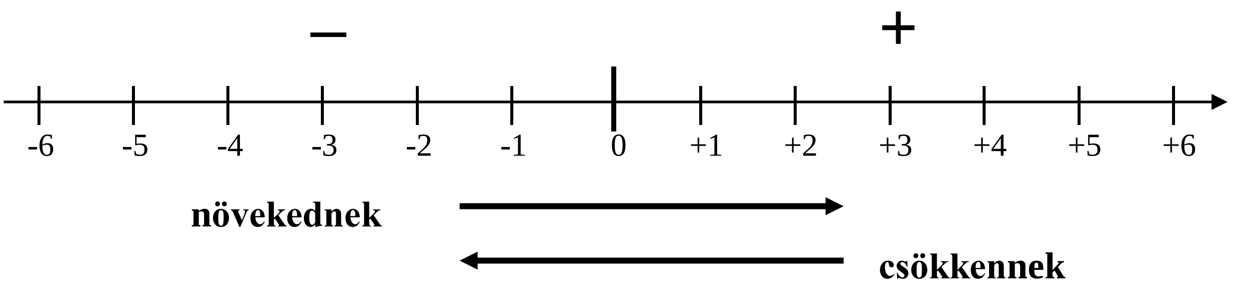
b. Szorzatot úgy is szorozhatunk (oszthatunk) egy számmal, hogy pontosan az egyik szorzótényezőjét szorozzuk a szorzóval, (osztjuk az osztóval), és utána végezzük el a szorzást.

Példa: (**6** * 4 * 3 * 10) * 2 = **(6 * 2)** * 4 * 3 *10 = 12 * 4 * 3 * 10 = 1440 vagy
(6 * 4 * 3 * **10**) * 2 = 6 * 4 * 3 * **(10 * 2)** = 6 * 4 * 3 * 20 = 1440

(**6** * 4 * 3 * 10) : 2 = **(6 : 2)** * 4 * 3 *10 = 3 * 4 * 3 * 10 = 360 vagy
(6 * 4 * 3 * **10**) : 2 = 6 * 4 * 3 * **(10 : 2)** = 6 * 4 * 3 * 5 = 360

22. Milyen irányban nőnek, illetve csökkennek a számok a vízszintes számegyenesen?

Egy egyenes pontjaihoz hozzárendeljük a valós számokat (Ez az általános iskolában használt összes szám együttes neve. Végtelen sok ilyen szám van.) a következőképpen: Minden ponthoz tartozik pontosan egy szám, és minden számnak pontosan egy pont felel meg. A számegyenesen elegendő két szám helyét kijelölni. Szokás bal-jobb irányú egyenesen felvenni a számegyenest.



A számegyenesen balról jobbra növekednek, jobbról balra, pedig csökkennek a számok.

23. Pozitív szám fogalma, előjele:

A pozitív számok nullánál nagyobb számok. A számegyenesen a nullától jobbra helyezkednek el. A pozitív szám előjele: + plusz. A + jelet nem kötelező kitenni. Ha egy nullától különböző szám előtt nincs előjel, akkor az pozitív szám.

Példa: +5 ; 1 9 ; +28 ; 241

24. Negatív szám fogalma, előjele:

A negatív számok nullánál kisebb számok. A számegyenesen a nullától balra helyezkednek el. A negatív szám előjele: **-** mínusz . Példa: -5 ; -28 ; -241

25. A nulla pozitív, vagy negatív szám?

A nulla se nem pozitív, se nem negatív szám.

26. A szám ellentettje:

1. Két szám ellentettje egymásnak, ha a számegyenesen a 0-tól egyenlő távolságra, de a nulla ellentétes oldalán helyezkednek el.
2. Két szám ellentettje egymásnak, ha összegük nulla.

Egy olyan szám van, amelynek ellentettje önmaga. Ez a szám a nulla.

Ha bármely számot megszorzunk (-1)-gyel, mindig a szám ellentettjét kapjuk eredményül.

Példa:

+ 7 ellentettje -7	+7 * (-1) = -7
-21 ellentettje +21	-21 * (-1) = +21
-35 ellentettje +35	-35 * (-1) = +35
+84 ellentettje -84	+84 * (-1) = -84

27. A szám abszolút értékének szemléletes jelentése.

A szám abszolút értéke a szám nullától való távolsága a számegyenesen. Jele: két függőleges vonal, közte a szám **$|+9|$**

Példa:

$|-5| = +5$

Olvasd így: mínusz öt abszolút értéke plusz öt.

$|+9| = +9$

Olvasd így: plusz kilenc abszolút értéke plusz kilenc.

$|-31| = +31$

Olvasd így: mínusz harmincegy abszolút értéke plusz harmincegy.

$|+47| = +47$

Olvasd így: plusz negyvenhét abszolút értéke plusz negyvenhét.

$|0| = 0$

Olvasd így: nulla abszolút értéke nulla

28. Nem negatív szám abszolút értéke, negatív szám abszolút értéke

A pozitív szám és a nulla (Ezeket együtt, nem negatív számoknak hívjuk.) **abszolút értéke** mindig önmaga.

$|+47| = +47$

$|+20| = +20$

$|0| = 0$

A negatív szám abszolút értéke mindig a szám ellentettje.

$|-31| = +31$

$|-7| = +7$

Az egész számok összeadásának, kivonásának megértéséhez használjuk a vagyon modellt.
Van egy perselyünk. Az ebben lévő pénz, és adósságcédula alkotja a vagyonunkat.

□ **Adósságcédula.** 1 forintnyi adósságra emlékeztet.
(Arra is használható, hogy emlékeztetőül ráírjuk, kinek is tartozunk azzal az 1 forinttal.)
Értéke: -1 Ft

○ **Pénz**
Értéke: 1 Ft

A vagyonom nulla, ha a pénz, és az adósságcédulák száma megegyezik.

○○○○○○ □□□□□□	○○○○ □□□□		○○○○○○○○○○ □□□□□□□□□□

A vagyon a perselyben, mind a négy esetben 0 Ft.

A vagyon megállapításakor, a pénz-adósságcédula párokat nem kell figyelembe venni, mert a párok értéke mindig nulla. Ezért a magányos forintok, vagy adósságcédulák száma adja a vagyonunkat.

	○○○○○○ □□□	○○○○ □□□□□□	□□□□□□	○○○○○○ □
A vagyon:	+3	-2	-6	+5 Ft.

29. Két azonos előjelű szám összeadása

Legyen a perselyben lévő vagyonunk pozitív, – azaz magányos forintjaink vannak – és tegyünk bele pénzt!

○○○○○○ □□□	+	○○○○	=	○○○○○○○○○○ □□□
+3	+	+4	=	**+7**
○○○○○○○○○ □□□	+	○○○○ ○	=	○○○○○○○○○○○○○○ □□□
+6	+	+5	=	**+11**

Ha pozitív vagyonhoz pénzt adunk, – azaz a magányos forintok számát növeljük – a vagyonunk továbbra is pozitív marad, és a magányos forintok száma összeadódik.

Legyen a perselyben lévő vagyonunk negatív, - azaz magányos adósságcéduláink vannak – és tegyünk bele adósságcédulát!

○○○ □□□□□	+	□□□ □□□	=	○○○ □□□□□□□□□□□
-2	+	-6	=	**-8**
○○ □□□□□□□□□	+	□□ □	=	○○ □□□□□□□□□□□□
-7	+	-3	=	**-10**

Ha negatív vagyonhoz adósságcédulát adunk, – azaz a magányos adósságcédulák számát növeljük – a vagyonunk továbbra is negatív marad, és a magányos adósságcédulák száma összeadódik.

Két azonos előjelű szám összeadásakor az eredmény előjele mindig a közös előjel lesz. Az összeadást a számok abszolút értékével végezzük.

Ha műveleti jel és előjel közvetlenül egymás után következik, célszerű az előjeles számot zárójelbe tenni.

Példa:

$-16 + (-5) = -21$ $+7 + (+9) = +14$ $-11 + (-6) = -17$ $+8 + (+4) = +12$

30. Két különböző előjelű szám összeadása

Legyen a perselyben lévő vagyonunk pozitív, – azaz magányos forintjaink vannak – és tegyünk bele adósságcédulát!

○○○○ □□	+	□□□ □□□	=	○○○○ □□□□□□□□□□
+2	+	-6	=	**-4**
○○○○○○○○ □□	+	□□□ □	=	○○○○○○○○ □□□□□□
+6	+	-4	=	**+2**

Pénzhez hozzáadva adósságcédulát, új párok keletkeznek, mintegy semlegesítve egymást. Vagyonunk előjele attól függ, hogy a magányos forintok, vagy a perselybe behelyezett magányos adósságcédulák száma a nagyobb. Amelyikből több van, abból marad magányos az új párok kialakulása után. A magányosok számát a forintok, és az adósságcédulák számának a különbsége adja.

Legyen a perselyben lévő vagyonunk negatív, – azaz magányos adósságcéduláink vannak – és tegyünk bele forintot!

○ □□□□□	+	○○○	=	○○○○ □□□□□
-4	+	+3	=	**-1**
○○○○ □□□□□□□	+	○○○ ○○	=	○○○○○○○○○ □□□□□□□
-3	+	+5	=	**+2**

Adóssácédulához hozzáadva pénzt, új párok keletkeznek, mintegy semlegesítve egymást. Vagyonunk előjele attól függ, hogy a magányos adósságcédulák, vagy a perselybe behelyezett magányos forintok száma a nagyobb. Amelyikből több van, abból marad magányos az új párok kialakulása után. A magányosok számát a forintok, és az adósságcédulák számának a különbsége adja.

Két különböző előjelű szám összeadásakor az eredmény előjele mindig a nagyobb abszolút értékű szám előjele lesz. (Amelyik távolabb van a nullától.) A nagyobb abszolút értékből kivonjuk a kisebb abszolút értéket..

Példa:

-8 + (+5) =

A -8 abszolút értéke a nagyobb, — ez van távolabb a nullától — ezért az összeg ennek a számnak az előjelét kapja, vagyis az eredmény mínusz lesz. A nagyobb abszolút értékből kivonjuk a kisebbet: 8 – 5 = 3

-8 + (**+**5) = **-**3

-15 + (+19) =

A +19 abszolút értéke a nagyobb, — ez van távolabb a nullától — ezért az összeg ennek a számnak az előjelét kapja, vagyis az eredmény plusz lesz. A nagyobb abszolút értékből kivonjuk a kisebbet: 19 – 15 = 4

-15 + (**+**19) = **+**4

31. Egész számok kivonása.

○○○○○○ □□□□□□□□□	–	○○○	=	○○○ □□□□□□□□□
-3	–	**+3**	=	**-6**

A perselyben 3 magányos adósságcédula van.
Mellettük akár végtelen sok pénz-adósságcédula pár lehet, hiszen ezek értéke 0. Ezért nem okoz gondot akárhány darab pénz, vagy adósságcédula kivétele a perselyből.
Kiveszünk 3 forintot, így újabb 3 adósságcédula válik magányossá. **A magányos adósságcédulák száma 6 lett.**

Ugyanezt az eredményt elérhetjük elvétel helyett hozzáadással is:

○○○○○○ □□□□□□□□□	+	□□□	=	○○○○○○ □□□□□□□□□□□□
-3	+	**-3**	=	**-6**

A perselyben, akárcsak az előbb, 3 magányos adósságcédula van.
Most azonban elvétel helyett **beteszünk 3 adósságcédulát** a perselybe, így újabb 3 adósságcédula válik magányossá. **A magányos adósságcédulák száma 6 lett.**

○○○○ □□□□□	–	□□	=	○○○○ □□□
-1	–	**-2**	=	**+1**

A perselyben 1 magányos adósságcédula van.
Mellette akár végtelen sok pénz-adósságcédula pár lehet, hiszen ezek értéke 0. Ezért nem okoz gondot akárhány darab pénz, vagy adósságcédula kivétele a perselyből.
Kiveszünk 2 adósságcédulát, így 1 darab pénz válik magányossá. **A magányos forintok száma 1 lett.**

Ugyanezt az eredményt elérhetjük elvétel helyett hozzáadással is:

○○○○ □□□□□	+	○○	=	○○○○○○ □□□□□
-1	+	**+2**	=	**+1**

A perselyben, akárcsak az előbb, 1 magányos adósságcédula van.
Most azonban elvétel helyett **beteszünk 2 pénzt** a perselybe, így 1 forintnak nem lesz párja. **A magányos forintok száma 1 lett.**

○○○○○○○○ □□□□□	–	□□	=	○○○○○○○○ □□□
+3	–	**-2**	=	**+5**

A perselyben 3 magányos forint van.
Mellette akár végtelen sok pénz-adósságcédula pár lehet, hiszen ezek értéke 0. Ezért nem okoz gondot akárhány darab pénz, vagy adósságcédula kivétele a perselyből.
Kiveszünk 2 adósságcédulát, így újabb 2 darab pénz válik magányossá. **A magányos forintok száma 5 lett.**

<u>Ugyanezt az eredményt elérhetjük elvétel helyett hozzáadással is:</u>

○○○○○○○○○ □□□□□	+	○○	=	○○○○○○○○○○○ □□□□□
+3	+	+2	=	**+5**

A perselyben, akárcsak az előbb, 3 magányos pénz van.
Most azonban elvétel helyett **beteszünk 2 pénzt** a perselybe, így 2-vel nő a magányos forintok száma. **A magányos forintok száma 5 lett.**

Kivonás helyett mindig végezhetünk összeadást. A változatlan kisebbítendőhöz hozzáadjuk a kivonandó ellentettjét.

Példa:

-7 – (-9) = -7 **+ (+9)** =
Az összeadásra van szabályunk, alkalmazzuk! = +2
+8 – (+15) = +8 **+ (-15)** =
Az összeadásra van szabályunk, alkalmazzuk! = -7
+4 – (-19) = +4 **+ (+19)** =
Az összeadásra van szabályunk, alkalmazzuk! = + 23

Természetesen, ha nagyobb pozitív számból veszünk el kisebb pozitív számot, nem kell felírni összeadásként. Egyszerűen elvégezzük a kivonást.

Példa:

+28 – (+5) = +23 17 – 6 = 11

<u>32. Két különböző előjelű szám szorzása</u>

a. <u>A szorzandó negatív szám, a szorzó pozitív egész szám</u>: az eredmény kiszámításakor felhasználjuk, hogy az ilyen szorzat fölírható azonos tagok összeadásaként.

-4 * (+5) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = **-20**

-8 * (+3) = (-8) + (-8) + (-8) = **-24**

-2 * (+7) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = **-14**

b. <u>A szorzandó pozitív egész szám, a szorzó negatív szám</u>: az ilyen szorzat nem írható föl azonos tagok összeadásaként.

Használjuk fel azt, hogy a szorzótényezők sorrendje tetszés szerint felcserélhető!

+3 * (-4) = -4 * (+3) = (-4) + (-4) + (-4) = **-12**

+7 * (-8) = -8 * (+7) = (-8) + (-8) + (-8) + (-8) + (-8) + (-8) + (-8) = **-56**

+5 * (-2) = -2 * (+5) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2) = **-10**

Az eredmény az **a** és **b** típusú feladatok esetén is negatív.
Az eredmény abszolút értékét pedig megkapjuk, ha a tényezők abszolút értékét összeszorozzuk.

Két különböző előjelű szám szorzásakor a szorzat mindig negatív lesz.
A szorzást a tényezők abszolút értékével végezzük.

Példa:

+5 * (-9) = -45

-3 * (+5) = -15

+6 * (-8) = -48

-12 * (+6) = -72

33. **Két azonos előjelű szám szorzása**

+4 * (+5) = (+4) + (+4) + (+4) + (+4) + (+4) = **+20**

+8 * (+3) = (+8) + (+8) + (+8) = **+24**

Vajon mi a következő két szorzás eredménye? -5 * (-3) = ? és -7 * (-2) = ?

Az utolsó két feladaton érdemes elgondolkodni.

-5 * (+3) = -15	-7 * (+3) = -21
-5 * (+2) = -10	-7 * (+2) = -14
-5 * (+1) = -5	-7 * (+1) = -7
-5 * 0 = 0	-7 * 0 = 0

Vegyük észre: ha a szorzót eggyel csökkentjük,

itt a szorzat mindig **5-tel nő.**	itt a szorzat mindig **7-tel nő.**
-15 < -10 < -5 < 0	**-21 < -14 < -7 < 0**

Csökkentsük ismét eggyel a szorzót, és tartsuk magunkat az előbb felismert szabályhoz! Így a szorzat kiszámolható.

-5 * (-1) = +5	-7 * (-1) = +7

Csökkentsük tovább a szorzót, és tartsuk magunkat továbbra is előbb már felhasznált szabályhoz!

-5 * (-2) = +10	**-7 * (-2) = <u>+14</u>**
-5 * (-3) = <u>+15</u>	

Két azonos előjelű szám szorzásakor a szorzat mindig pozitív lesz.
A szorzást az abszolút értékekkel végezzük.

Példa:

+5 * (+8) = +40 -7 * (-7) = +49 +9 * (+2) = +18 -15 * (-8) = +120

32. **Két különböző előjelű szám osztása**

1.

-12 : (+4) = ?

Az ismeretlen hányadost jelöljük **a**-val, és hívjuk segítségül az ellenőrzést!

-12 : (+4) = a Ellenőrzés: +4 * a = -12

Az egész számok szorzásáról tanultak alapján megállapíthatjuk, hogy **a = -3.**

Hiszen: +4 * **(-3)** = -12

Tehát : -12 : (+4) = <u>-3</u>

2.

+32 : (-8) = ?

Az ismeretlen hányadost jelöljük **a**-val, és hívjuk segítségül az ellenőrzést!

+32 : (-8) = a Ellenőrzés: -8 * a = +32

Az egész számok szorzásáról tanultak alapján megállapíthatjuk, hogy **a = -4.**

Hiszen: -8 * **(-4)** = +32

Tehát: +32 : (-8) = <u>-4</u>

Két különböző előjelű szám osztásakor a hányados mindig negatív lesz.
Az osztást az osztandó és az osztó abszolút értékével végezzük.

Példa:

-36 : (+6) = -6 +20 : (-4) = -5 -63 : (+7) = -9 +81 : (-9) = -9

33. Két azonos előjelű szám osztása

1.

$+12 : (+4) = +3$

2.

$-35 : (-7) = ?$

Az ismeretlen hányadost jelöljük **a**-val, és hívjuk segítségül az ellenőrzést!

$-35 : (-7) = a$

Ellenőrzés:

$-7 * a = -35$

Az egész számok szorzásáról tanultak alapján megállapíthatjuk, hogy **a = +5.**

Hiszen:

$-7 * \mathbf{(+5)} = -35$

$\mathbf{-35 : (-7) = \underline{\underline{+5}}}$

Két azonos előjelű szám osztásakor a hányados mindig pozitív lesz.
Az osztást az osztandó és az osztó abszolút értékével végezzük.

Példa:

$+30 : (+6) = +5$ $-32 : (-4) = +8$ $+28 : (+7) = +4$ $-36 : (-4) = +9$

+ * – = –	+ * + = +
– * + = –	– * – = +
+ : – = –	+ : + = +
– : + = –	– : – = +

34. Többtényezős szorzat (hányados) előjele.

Ha a feladatban csak szorzás, **vagy** csak osztás van, illetve csak szorzás **és** osztás van, akkor az eredmény előjele könnyen meghatározható. Meg kell számolni a negatív előjelek számát.
Ha a negatív előjelek száma páros, akkor az eredmény pozitív lesz.
Ha a negatív előjelek száma páratlan, akkor az eredmény negatív lesz.

Példa:

$-5 * (+4) * (-7) * (-2) * (+6) * (-9) = \ ?$

A szorzatban négy darab (páros számú.) negatív szám van. Az eredmény pozitív.

$-5 * (+4) * (-7) * (-2) * (+6) * (-9) = +$

$+40 : (-5) * (-3) * (-6) * (+7) : (+2) = \ ?$

A feladatban csak szorzás és osztás van. Számoljuk meg a negatív számokat. Hármat (páratlan számút) találtunk. Az eredmény negatív.

$+40 : (-5) * (-3) * (-6) * (+7) : (+2) = \ -$

MATEMATIKA I.

Ha az egészet eltörjük, darabokat, törteket kapunk. Az elkövetkezőkben mindig olyan darabokkal fogunk foglalkozni, amelyeket úgy kapunk, hogy az egészeket egyenlő részekre osztjuk. Az így kapott daraboknak nevet is adunk, mégpedig aszerint, hogy hány egyenlő részre osztottuk az egészet. Ha például az egészet három egyenlő részre osztjuk, akkor a keletkező darabok neve harmad, ha öt egyenlő részre daraboljuk, akkor a darabok neve ötöd, kilenc egyenlő részre osztásnál kilenced, stb….

35. A közönséges tört részei.

A *közönséges* tört alakban írt szám részei:

$$\frac{a}{b}$$

SZÁMLÁLÓ: Megmutatja a darabok számát. (Megszámlálja a darabokat.)

TÖRTVONAL

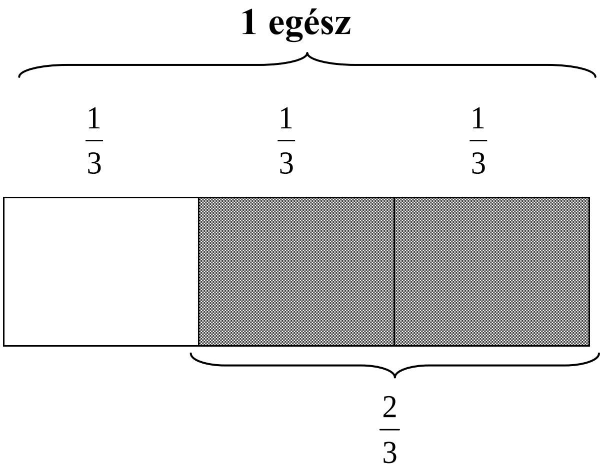
NEVEZŐ: megmutatja, hogy hány egyenlő részre osztották az egészet.
Így azt is elárulja, hogy hány darab kell egy egész kirakásához. (Ez adja a darab nevét.)

Példa: $\frac{2}{5}$ kettő ötöd; $\frac{3}{7}$ három heted; $\frac{9}{20}$ kilenc huszad

36. Adott tört kétféle értelmezése

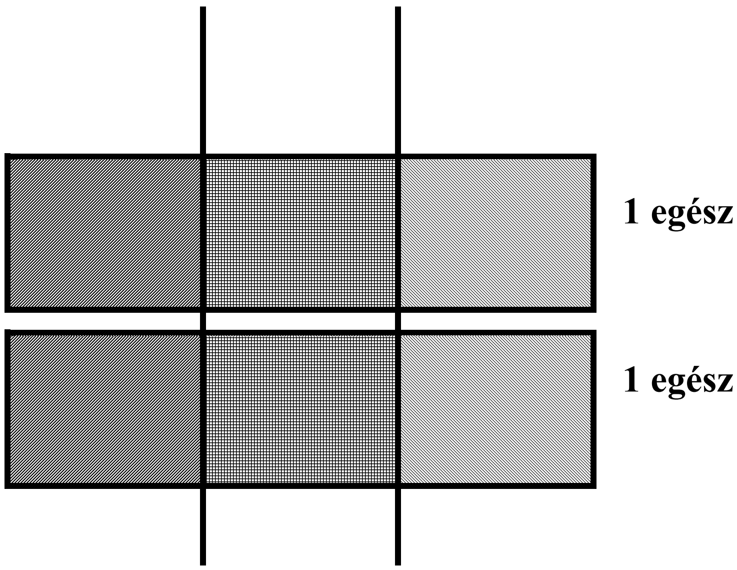
Hogyan tehetünk szert $\frac{2}{3}$ csokira?

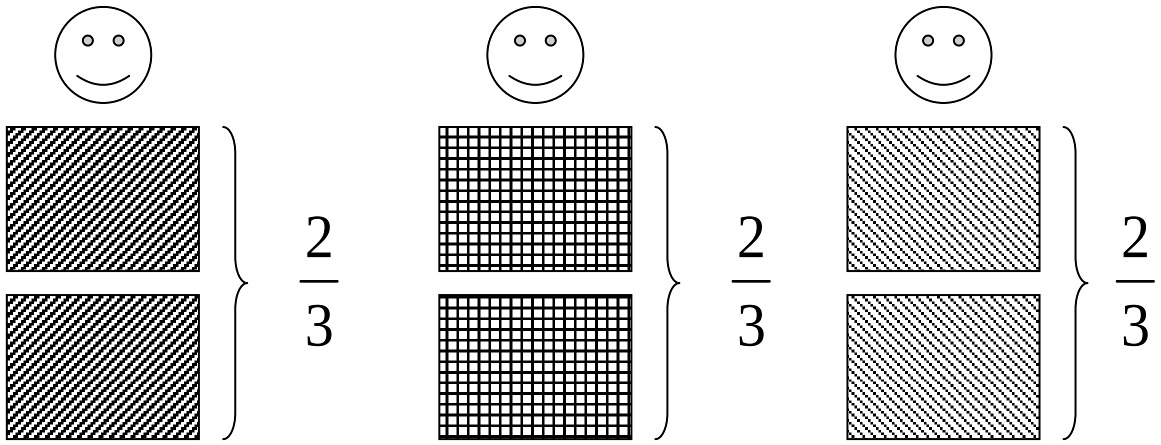
I. **1 egész** csokit felosztunk 3 egyenlő részre, és ezekből két darabot veszünk.



II. **2 egész csokit osztunk el** három gyerek között egyenlően.

Mindhárman $\frac{2}{3}$ csokit kapnak.





A matematika nyelvén leírva:

$$2:3=\frac{2}{3}$$

<u>Minden osztás felírható tört alakban.</u>

Példa: $5:7=\frac{5}{7}$; $3:9=\frac{3}{9}$; $6:2=\frac{6}{2}$; $1:2=\frac{1}{2}$;

<u>Minden tört felírható osztásként:</u>

Példa: $\frac{4}{5}=4:5$; $\frac{9}{7}=9:7$; $\frac{3}{8}=3:8$; $\frac{7}{4}=7:4$;

37. A tört mikor kisebb, mint 1 egész?

A tört kisebb, mint 1 egész, ha a számláló kisebb, mint a nevező.

Példa: $\frac{2}{9}<1$; $\frac{4}{7}<1$; $\frac{5}{11}<1$; $\frac{3}{8}<1$; $\frac{6}{25}<1$

Az 1 egész kirakásához szükséges darabok száma — ezt a nevező mutatja — több, mint amennyivel rendelkezünk — ezt a számláló mutatja.

38. A tört mikor egyenlő 1 egésszel?

A tört egyenlő 1 egésszel, ha a számláló egyenlő a nevezővel.

Példa: $\frac{9}{9}=1$; $\frac{7}{7}=1$; $\frac{11}{11}=1$; $\frac{8}{8}=1$; $\frac{25}{25}=1$

Az 1 egész kirakásához szükséges darabok száma — ezt a nevező mutatja — pontosan annyi, mint amennyivel rendelkezünk — ezt a számláló mutatja.

39. A tört mikor nagyobb, mint 1 egész?

A tört nagyobb, mint 1 egész, ha a számláló nagyobb, mint a nevező.

Példa: $\frac{7}{2}>1$; $\frac{9}{7}>1$; $\frac{5}{11}>1$; $\frac{8}{3}>1$; $\frac{6}{5}>1$

Az 1 egész kirakásához szükséges darabok száma — ezt a nevező mutatja — kevesebb, mint amennyivel rendelkezünk — ezt a számláló mutatja.

40. A vegyes szám.

Az 1 egésznél nagyobb törtek fölírhatók vegyes számként.

Vegyes szám: Egy egész szám és egy 1egésznél kisebb tört összege. Az összeadásjelet nem írjuk ki.

Példa:

$\frac{8}{5}=1+\frac{3}{5}=\mathbf{1\frac{3}{5}}$; $\frac{9}{4}=2+\frac{1}{4}=\mathbf{2\frac{1}{4}}$; $\frac{11}{2}=5+\frac{1}{2}=\mathbf{5\frac{1}{2}}$; $\frac{23}{6}=3+\frac{5}{6}=\mathbf{3\frac{5}{6}}$

41. Közönséges tört felírása vegyes szám alakba.

1 egésznél nagyobb törtet úgy írunk fel vegyes számként, hogy a számlálót elosztjuk a nevezővel, a hányados lesz a vegyes szám egész része, a maradék, pedig a törtrész számlálója.

Példa:

$\frac{17}{5}=?$ 17 : 5 = 3

2

$\frac{17}{5}=3\frac{2}{5}$

$\frac{21}{4}=?$ 21 : 4 = 5

1

$\frac{21}{4}=5\frac{1}{4}$

42. Vegyes szám fölírása közönséges törtként.

Vegyes számot úgy írunk át tört alakba, hogy a törtrész nevezőjével megszorozzuk az egész számot és hozzáadjuk a törtrész számlálóját. Ez lesz a tört számlálója, a törtrész nevezőjéből pedig a tört nevezője lesz.

Példa:

$4\frac{3}{7}=?$ 4 * 7 = 28 28 + 3 = 31 $4\frac{3}{7}=\frac{31}{7}$

$5\frac{2}{8}=?$ 5 * 8 = 40 40 + 2 = 42 $5\frac{2}{8}=\frac{42}{8}$

Figyelem!!

A $\frac{6}{3}$; $\frac{14}{7}$ $\frac{8}{2}$; $\frac{25}{5}$; $\frac{40}{4}$; $\frac{60}{6}$ számok egész számok, csak éppen tört alakban írtuk fel őket.

43. Bővítés

Bővítés: A tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nullától különböző számmal szorozzuk. A tört értéke nem változik, csak az alakja.

Példa:

$$\frac{3}{5} \underset{*2}{\overset{*2}{=}} \frac{6}{10}; \quad \frac{5}{7} \underset{*3}{\overset{*3}{=}} \frac{15}{21}; \quad \frac{2}{3} \underset{*6}{\overset{*6}{=}} \frac{12}{18};$$

44. Egyszerűsítés

Egyszerűsítés: A tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nullától különböző számmal osztjuk. A tört értéke nem változik, csak az alakja.

Példa:

$$\frac{5}{10} \underset{:5}{\overset{:5}{=}} \frac{1}{2}; \quad \frac{15}{27} \underset{:3}{\overset{:3}{=}} \frac{5}{9}; \quad \frac{12}{20} \underset{:4}{\overset{:4}{=}} \frac{3}{5};$$

(Ha már biztonsággal tudsz egyszerűsíteni, bővíteni, a nyilakat természetesen nem kell kitenni, de kezdetben segíthetnek.)

45. Közös nevezőre hozás. (Példa)

Közös nevezőre hozás: Gyakran csak olyan törtekkel tudunk dolgozni, amelyeknek azonos a nevezőjük (esetleg a számlálójuk). Ha mégsem azonosak a nevezők (számlálók), akkor kénytelenek vagyunk közös nevezőre (számlálóra) hozni a törteket a következőképpen:

Példa:

Hozzuk közös nevezőre a következő törteket!

$$\frac{4}{24};\quad \frac{18}{27};\quad \frac{21}{35}$$

1. LÉPÉS: Ha lehet, egyszerűsítsük a törteket!

$$\frac{4}{24} = \mathbf{\frac{1}{6}};\qquad \frac{18}{27} = \mathbf{\frac{2}{3}};\qquad \frac{21}{35} = \mathbf{\frac{3}{5}}$$

Az első törtet 4-gyel, a másodikat 9-cel, a harmadikat 7-tel egyszerűsítettük. A következő lépést már az egyszerűsített alakkal végezzük.

2. LÉPÉS: Meg kell keresnünk a nevezők [6; 3; 5] legkisebb közös többszörösét. Amíg nincs nagy gyakorlatunk, érdemes a következőképpen eljárni: Írjuk egymás mellé a nevezőket. A nevezők alá, pedig a kétszeresüket, háromszorosukat stb…. Ezt mindaddig folytassuk, amíg minden nevező alatt az utolsó helyen ugyanazt a számot nem találjuk. Ez lesz a keresett közös nevező. (Mindig annál az oszlopnál kell folytatni a szorzást, ahol az utolsó helyen a legkisebb szám áll.)

6	3	5
12	6	10
18	9	15
24	12	20
30	15	25
	18	**30**
	21	
	24	
	27	
	30	

A közös nevező a 30.

3. LÉPÉS: Minden törtnél megkeressük az új nevezőhöz tartozó számlálót. (Bővítés)

$\frac{4}{24}=\frac{1}{6}=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{30}}$; $\frac{18}{27}=\frac{2}{3}=\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{30}}$; $\frac{21}{35}=\frac{3}{5}=\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{30}}$

46. Azonos nevezőjű törtek összehasonlítása.

Két azonos nevezőjű tört közül az a nagyobb, amelyiknek a számlálója nagyobb.

Példa: $\frac{5}{20} < \frac{9}{20}$;

A tábla csokit mindkét esetben 20 egyenlő részre osztottuk fel. Ezt a nevező mutatja.

Az első esetben 5, a második esetben 9 darab csokit ettünk meg, az egyenlő nagyságú szeletekből. Amikor 9 darabot ettünk, akkor ettünk több csokit.

(Másik indoklás: Első esetben 5 csokit, a második esetben 9 csokit osztottunk el 20 gyerek között egyenlően. Mikor kaptak több csokit a gyerekek?)

$\frac{7}{9} > \frac{2}{9}$; $\frac{9}{15} < \frac{11}{15}$; $\frac{8}{5} > \frac{3}{5}$;

47. Azonos számlálójú törtek összehasonlítása.

Két azonos számlálójú tört közül az a nagyobb, amelyiknek a nevezője kisebb.

Példa: $\frac{5}{17} < \frac{5}{8}$;

Most mindkét esetben 5 szelet csokit ettünk. Ezt a számláló mutatja.

Az első esetben 17, a második esetben 8 egyenlő darabra osztottuk a tábla csokit. Az első esetben sokkal kisebb darabokat kaptunk.

(Másik indoklás: Első esetben az 5 csokit 17, a második esetben az 5 csokit 8 gyerek között osztottuk el egyenlően. Mikor kaptak több csokit a gyerekek?)

$\frac{7}{9} > \frac{7}{20}$; $\frac{9}{15} < \frac{9}{10}$; $\frac{8}{5} > \frac{8}{14}$;

Ha olyan törteket kell összehasonlítanunk, amelyeknek sem a számlálója, sem a nevezője nem egyezik meg, akkor

vagy

közös nevezőre hozzuk őket:

$$\frac{7}{9} \quad ? \quad \frac{12}{15}$$

$$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{9}} = \frac{35}{45} < \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{15}} = \frac{36}{45}$$

vagy

közös számlálóra hozzuk őket:

$$\frac{3}{17} \quad ? \quad \frac{4}{21}$$

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{17}} = \frac{12}{68} < \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{21}} = \frac{12}{63}$$

Esetleg **próbálkozhatunk vegyes számmá alakítással:**

$$\frac{20}{11} \quad ? \quad \frac{43}{21}$$

$$\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{11}} = 1\frac{9}{11} < \frac{\mathbf{43}}{\mathbf{21}} = 2\frac{1}{21}$$

48. Közönséges törtek összeadása, kivonása. Összeadni és kivonni csak azonos nevezőjű törteket tudunk.

Azonos nevezőjű törtek összeadásakor és kivonásakor az eredmény nevezője a közös nevező lesz. A műveletet a számlálókkal végezzük. A végeredményt, ha lehet, vegyes számmá alakítjuk, és egyszerűsítjük.

Példa:

$$\frac{5}{9} + \frac{10}{9} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{9}} = 1\frac{6}{9} = 1\frac{2}{3}$$

$$\frac{19}{15} - \frac{9}{15} = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{15}} = \frac{2}{3}$$

Különböző nevezőjű törteket az összeadás illetve kivonás előtt közös nevezőre kell hozni.

Példa:

$$\frac{5}{3} + \frac{3}{4} =$$

Hozzuk közös nevezőre a két törtet! (Egyik tört sem egyszerűsíthető.)

3	4
6	8
9	**<u>12</u>**
<u>12</u>	

$$\frac{5}{3} = \frac{20}{12} \qquad \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{5}{3} + \frac{3}{4} = \frac{20+9}{12} = \frac{29}{12} = \mathbf{2\frac{5}{12}}$$

49. Vegyes számok összeadása, kivonása.

Vegyes számok összeadása: Vegyes számokat összeadhatunk úgy, hogy

a. Összeadjuk külön az egészeket, és külön a törteket, majd kiszámítjuk ezek összegét,

Példa:

$$2\frac{3}{5}+3\frac{4}{5}=(2+3)+(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})=5+\frac{7}{5}=5+1\frac{2}{5}=6\frac{2}{5}$$

vagy

b. a vegyes számokat átírjuk tört alakba, és a törteket adjuk össze..

Példa:

$$2\frac{3}{5}+3\frac{4}{5}=$$

$$2\frac{3}{5}=\frac{13}{5} \qquad 3\frac{4}{5}=\frac{19}{5}$$

$$2\frac{3}{5}+3\frac{4}{5}=\frac{13}{5}+\frac{19}{5}=\frac{32}{5}=6\frac{2}{5}$$

Vegyes számok kivonása:

a. A vegyes számokat általában célszerű felírni tört alakban, és a törtekkel elvégezni a kivonást.

Példa:

$$4\frac{3}{7}-2\frac{5}{7}=\frac{31}{7}-\frac{19}{7}=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$$

b. Most is elvégezhető a művelet úgy is, hogy külön számolunk az egészekkel, és külön a törtekkel. Az egészek különbségéhez hozzá kell adnunk a törtek különbségét. (Előfordulhat, hogy nagyon figyelnünk kell az előjelre.)

$$4\frac{3}{7}-2\frac{5}{7}=(4-2)+\left(\frac{3}{7}-\frac{5}{7}\right)=2+\left(-\frac{2}{7}\right)=2-\frac{2}{7}=1\frac{5}{7}$$

50. Közönséges tört szorzása egész számmal.

Példa: $\frac{2}{5}*3=$?Az eredmény kiszámításához használjuk fel, hogy ez a szorzat felírható azonos tagok összegeként. $\frac{2}{5}*3=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=$ Törteket összeadni tudunk: $\frac{2}{5}*3=\frac{2}{5}+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$

Tudjuk tehát, hogy a $\frac{2}{5}*3$ művelet eredménye $\frac{6}{5}$.

Ezt az eredményt megkapjuk, ha a tört számlálóját szorozzuk az egész számmal.

$$\frac{2}{5}*3=\frac{2*3}{5}=\frac{6}{5}$$

Törtet egész számmal úgy szorzunk, hogy a számlálót szorozzuk az egész számmal, a nevező változatlan marad. A szorzás jelölése után megpróbálunk egyszerűsíteni.

Példa:

$$\frac{4}{15}*6=\frac{4*\overset{2}{\cancel{6}}}{\underset{5}{\cancel{15}}}=\frac{8}{5}=1\frac{3}{5}$$

A szorzás jelölése után 3-mal egyszerűsítettünk. A számlálót és a nevezőt is osztottuk 3-mal. A számlálóban most egy szorzat van. Szorzatot úgy is oszthatunk egy számmal, hogy pontosan az egyik szorzótényezőjét osztjuk az osztóval. Jelen esetben a 6-ot osztottuk 3-mal.

51. Egész szám szorzása közönséges törttel.

Példa: $14*\frac{2}{21}=\ ?$

A szorzótényezők sorrendje tetszés szerint felcserélhető, a szorzat nem változik.

$14*\frac{2}{21}=\frac{2}{21}*14$ Tehát:

$$14*\frac{2}{21}=\frac{\cancel{14}^{2}*2}{\cancel{21}_{3}}=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3}$$

Egész számot törttel úgy szorzunk, hogy a számlálót szorozzuk az egész számmal, a nevező változatlan marad. A szorzás jelölése után megpróbálunk egyszerűsíteni.

52. Közönséges tört szorzása közönséges törttel.

$\frac{3}{4}*\frac{7}{5}=\ ?$

Használjuk fel a szorzat változásáról tanultakat! Szorozzuk meg először az $\frac{3}{4}$-et 7-tel!

a. $\frac{3}{4}*\mathbf{7}=$ Ezt a szorzást el tudjuk végezni. $\frac{3}{4}*7=\frac{3*7}{4}=\frac{21}{4}$

Csökkentsük a szorzót az ötödére! Osszuk el a szorzót 5-tel! $7:5=\frac{7}{5}$. A változatlan szorzandót szorozzuk az új szorzóval!

b. $\frac{3}{4}*\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}}=$ *(Eredetileg ennek a szorzatnak keressük az értékét.) Ha pontosan az egyik szorzótényezőt valahányad részére csökkentjük, akkor a szorzat is ugyanannyiad részére csökken.*

Az **a** szorzatbeli szorzót ötödére csökkentettük. Így a szorzat is ötödére csökken.

$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}*\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{5}}=\frac{3*7}{4}:5=\frac{\mathbf{3*7}}{\mathbf{4*5}}=\frac{21}{20}$ Tudjuk tehát, hogy a $\frac{3}{4}*\frac{7}{5}$ szorzat értéke $\frac{21}{20}$.

Vegyük észre, hogy ezt az eredményt kapjuk akkor, ha a számlálót megszorozzuk a számlálóval, a nevezőt, pedig a nevezővel!

$$\frac{3}{4}*\frac{7}{5}=\frac{\mathbf{3*7}}{\mathbf{4*5}}=\frac{21}{20}=1\frac{1}{20}$$

Törtet törttel úgy szorzunk, hogy a számlálót szorozzuk a számlálóval, a nevezőt szorozzuk a nevezővel. A szorzás jelölése után megpróbálunk egyszerűsíteni.

Példa:

$$\frac{8}{15}*\frac{25}{12}=\frac{\cancel{8}^{2}*\cancel{25}^{5}}{\cancel{15}_{3}*\cancel{12}_{3}}=\frac{10}{9}=1\frac{1}{9}$$

Egyszerűsítés: A 8-at és a 12-őt néggyel osztottuk. A 25-öt és a 15-öt öttel. Érdemes még a szorzások elvégzése előtt egyszerűsíteni, mert így talán csökken a számolási hibák esélye.

53. Közönséges tört osztása egész számmal.

Példa: $\frac{5}{8}:2=\ ?$ Öt szelet csokit kell egyenlően szétosztani két gyerek között. Mit tegyünk?

Bővítsük az osztandót az osztóval, vagyis most 2-vel.

$$\frac{5}{8}=\frac{10}{16}$$

Írjuk az osztandó helyére a vele megegyező értékű, de új alakú osztandót!

$$\frac{10}{16}:2=$$

Most tíz szelet csokit kell egyenlően szétosztani két gyerek között. Ez már nem okoz gondot. Minden gyerek kap öt szelet csokit. A szeletek neve tizenhatod.

$$\frac{10}{16}:2=\frac{5}{16}$$

Ezt az eredményt megkapjuk akkor is, ha az eredeti osztásban az osztandó nevezőjét megszorozzuk az osztóval.

$$\frac{5}{8}:2=\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{8*2}}=\frac{5}{16}$$

Törtet úgy osztunk egész számmal, hogy a nevezőt szorozzuk az osztóval, a számláló változatlan marad. A szorzás jelölése után megpróbálunk egyszerűsíteni.

Példa:

$$\frac{16}{3}:12=\frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{3*\underset{3}{\cancel{12}}}=\frac{4}{9}$$

54. A reciprok érték.

Reciprok érték: Két szám reciprok értéke egymásnak, ha szorzatuk +1.
(A tört reciprok értékét megkapjuk, ha a számlálót és a nevezőt felcseréljük.)

Példa:

$\frac{2}{5}$ reciprok értéke $\frac{5}{2}$, mert $\frac{2}{5}*\frac{5}{2}=\frac{10}{10}=1$

$\frac{4}{7}$ reciprok értéke $\frac{7}{4}$, mert $\frac{4}{7}*\frac{7}{4}=\frac{28}{28}=1$

$-\frac{5}{3}$ reciprok értéke $-\frac{3}{5}$, mert $-\frac{5}{3}*(-\frac{3}{5})=+\frac{15}{15}=1$

2 reciprok értéke $\frac{1}{2}$, mert $2*\frac{1}{2}=\frac{2}{2}=1$

55. Melyek azok a számok, amelyek megegyeznek a reciprok értékükkel?

Két olyan szám van, amely megegyezik a reciprok értékével. A +1 és a -1.
+1 reciprok értéke +1 mert +1 * (+1) = +1
-1 reciprok értéke -1 mert -1 * (-1) = +1

56. A nulla reciprok értéke.

A 0-nak nincs reciprok értéke.

$0 * r \neq 1$

Az r helyére bármilyen számot írunk, a szorzat mindig 0. Nincs olyan szám, amit 0-val szorozva +1-et kapnánk.

57. Közönséges tört osztása közönséges törttel. (Példa)

Példa:

$$\frac{5}{8} : \frac{2}{3} = \ ?$$

Használjuk fel a hányados változásairól tanultakat! Osszuk el először az $\frac{5}{8}$-ot 2-vel!

a. $$\frac{5}{8} : 2 =$$

Ezt az osztást el tudjuk végezni:

$$\frac{5}{8} : 2 = \frac{5}{8 * 2}$$

Osszuk el az osztót 5-tel! $2 : 5 = \frac{2}{5}$. Legyen most ez az új osztó. Az eredeti osztót az ötödére csökkentettük.

A változatlan osztandót osszuk az új osztóval!

b. $\frac{5}{8} : \frac{2}{3} =$ *(Eredetileg is ezt az osztást akartuk elvégezni.) Ha változatlan osztandó mellett az osztót felére, harmadára, negyedére stb. csökkentjük, akkor a hányados kétszeresére, háromszorosára, négyszeresére stb. növekszik.*

Az **a** feladat osztóját harmadára csökkentettük. Így a hányados a háromszorosára nő.

$$\mathbf{\frac{5}{8} : \frac{2}{3}} = (\frac{5}{8} : 2) * 3 = \frac{5}{8 * 2} * 3 = \mathbf{\frac{5 * 3}{8 * 2}} = \mathbf{\frac{15}{16}}$$

Észreveheted, hogy ezt az eredményt kapjuk akkor is, ha a változatlan osztandót megszorozzuk az osztó reciprok értékével.

$$\frac{5}{8} \mathbf{:} \mathbf{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8} * \mathbf{\frac{3}{2}} = \frac{5 * 3}{8 * 2} = \frac{15}{16}$$

Törtet törttel úgy osztunk, hogy a változatlan osztandót megszorozzuk az osztó reciprok értékével. A szorzás jelölése után megpróbálunk egyszerűsíteni.

Példa:

$$\frac{8}{15} : \frac{12}{25} = \frac{8}{15} * \frac{25}{12} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}} * \overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{3}{\cancel{15}} * \underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$$

Egyszerűsítés: A 8-at és a 12-őt néggyel osztottuk. A 25-öt és a 15-öt öttel.

58. Egész szám osztása közönséges törttel.

Egész számot törttel úgy osztunk, hogy a változatlan osztandót megszorozzuk az osztó reciprok értékével. A szorzás jelölése után megpróbálunk egyszerűsíteni.

Példa: $$3:\frac{7}{4}=3*\frac{4}{7}=\frac{3*4}{7}=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$$

59. Vegyes számok szorzása, osztása.

Vegyes számok szorzásánál, osztásánál célszerű a vegyes számot tört alakban felírni, és a tört alakú számmal elvégezni a műveletet.

60. A tizedes tört fogalma.

Azokat a törteket, amelyeknek a nevezője 10, 100, 1000, 10000 … stb., tizedes törteknek nevezzük.

Ezek a törtek beírhatók a tízes számrendszer helyiérték-táblázatába, így a tizedes törtek törtvonal nélkül is leírhatók, úgynevezett „vesszős tört” alakban.

Példa: $\frac{3}{10}$ $\frac{7}{100}$ $\frac{23}{100}$ $\frac{6}{1000}$ $\frac{49}{1000}$ $25\frac{4}{100}$

$$\frac{23}{100}=\frac{20}{100}+\frac{3}{100}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100} \qquad \frac{49}{1000}=\frac{40}{1000}+\frac{9}{1000}=\frac{4}{100}+\frac{9}{1000}$$

	Egészek		**Tizedes jegyek**				
	10	**1**	$\mathbf{\frac{1}{10}}$	$\mathbf{\frac{1}{100}}$	$\mathbf{\frac{1}{1000}}$	$\mathbf{\frac{1}{10000}}$	$\mathbf{\frac{1}{100000}}$
$\frac{3}{10}$ →			3				
$\frac{7}{100}$ →				7			
$\frac{6}{1000}$ →					6		
$\frac{23}{100}$ →			2	3			
$\frac{49}{1000}$ →				4	9		
$25\frac{4}{100}$ →	2	5		4			

Az egészeket vesszővel („tizedesvesszővel”) választjuk el a törtektől. A tizedesvesszőtől jobbra lévő számjegyek a tizedes jegyek.

$\frac{3}{10}=0{,}3$ $\frac{7}{100}=0{,}07$ $\frac{23}{100}=0{,}23$ $\frac{6}{1000}=0{,}006$ $\frac{49}{1000}=0{,}049$ $25\frac{4}{100}=25{,}04$

61. Tizedes törtek kiolvasása:

1. LÉPÉS: Kiolvassuk a vesszőtől balra lévő számot.
2. LÉPÉS: A vesszőhöz érve kimondjuk az „egész” szót.
3. LÉPÉS: Kiolvassuk a vesszőtől jobbra lévő számot.
4. LÉPÉS: Hozzámondjuk az utolsó számjegy helyi értékét.

Példa: 5,26

Öt *egész* huszonhat *század*

72,085

Hetvenkettő *egész* nyolcvanöt *ezred*

4305,0384

Négyezer-háromszázöt *egész* háromszáznyolcvannégy *tízezred*

62. Tizedes törtek írásbeli összeadása, kivonása:

Tizedes törteket írásban úgy adunk össze és vonunk ki, mint természetes számokat. Ügyeljünk arra, hogy a tizedes vesszők egymás alatt legyenek. Az üres helyi értékekre mindig 0-t képzelünk. (Kezdetben ezeket a nullákat ki is írhatjuk.) Ha nincs tizedes jegy, az egyesek után akkor is képzeljük oda a tizedesvesszőt!

Példa: **43,8 + 5,36 =**

$$\begin{array}{r} 43{,}80 \\ +\ 05{,}36 \\ \hline 49{,}16 \end{array}$$

283,054 + 2,6 + 2781 + 0,0648 =

$$\begin{array}{r} 0283{,}05400 \\ 0002{,}60000 \\ 2781{,}00000 \\ +\ 0000{,}00648 \\ \hline 3066{,}66048 \end{array}$$

654,49 – 23,147 =

$$\begin{array}{r} 654{,}490 \\ -\ 023{,}147 \\ \hline 631{,}343 \end{array}$$

63. Tizedes törtek szorzása

Tizedes törtekkel úgy szorzunk, mint egész számokkal. A részszorzatokban nem tesszük ki a tizedesvesszőt. A szorzatban annyi tizedes jegyet jelölünk, amennyi a szorzandóban és a szorzóban összesen van.

Példa: **6,35 * 2,3 =**

Egyelőre ne vegyünk tudomást a tizedesvesszőről. Tehát úgy kell tennünk, mintha a 635–öt és a 23-at szoroznánk össze.

$$\begin{array}{r} 6{,}35 * 2{,}3 \\ \hline 1270 \\ +\ \ 1905 \\ \hline 14605 \end{array}$$

Ha eddig eljutottunk, számoljuk össze a szorzandóban és a szorzóban a tizedes jegyeket. A szorzandóban most kettő van, a szorzóban egy. Ez összesen három. A szorzatban tehát három tizedes jegynek kell lennie. Tegyük ki a tizedesvesszőt!

```
  6,35 * 2,3
  ----
  1270
+   1905
 -----------
  14,605
```

*A 635 * 23 szorzatból úgy kaptuk a 6,35 * 2,3 szorzatot, hogy az egyik szorzótényezőt a század részére, a másikat a tizedére változtattuk. Belátható, hogy a szorzat ezek után az eredetinek ezred része lesz. 14605-nek valóban ezred része a 14,605. A megadott szabály szerint elvégzett szorzás valóban jó eredményhez vezetett.*

64. Tizedes tört osztása egész számmal:

Tizedes tört egész számmal való írásbeli osztásakor úgy járunk el, mint természetes számok osztásakor, de amikor az osztandóban az első tizedes jegyet jelöljük, a hányadosban kitesszük a tizedesvesszőt.

Példa:

```
5’8,36 : 3 = 1
2

5’8’,36 : 3 = 19
2 8
  1

5’8’,3’6 : 3 = 19
2 8
  1
```

Most jelöltük az első tizedes jegyet az osztandóban. Mielőtt lehozzuk a számot az 1-es mellé, kitesszük a hányadosban a tizedesvesszőt. A továbbiakban nem kell vele törődni.

```
5’8’,3’6 : 3 = 19,
2 8
  1 3

5’8’,3’6’ : 3 = 19,45
2 8
  1 3
    1 6
      1
```

Látszólag elfogytak a számjegyek. De ez csak a látszat. A 6-os után még végtelen sok 0 sorakozik. Hozzunk le belőlük kettőt.

```
5’8’,3’6’ : 3 = 19,4533
2 8
  1 3
    1 6
      10
        10
          1
```

Az osztást ez esetben a végtelenségig folytathatnánk, de elégedjünk meg négy tizedes jegy pontossággal.

65. Az osztó tizedes tört:

Ha az osztó tizedes tört, az osztás nem végezhető el.
Az osztandóban és az osztóban annyi helyi értékkel visszük jobbra a tizedesvesszőt, hogy az **osztó** egész szám legyen. Ezután az osztás elvégezhető. Az ellenőrzést mindig az eredeti osztóval végezzük.

Példa:

1. 4 3 , 7 6 4 : 2 , 5 = Ez az osztás nem végezhető el.

Az osztóban **egy** tizedes jegy van. Vigyük jobbra a tizedesvesszőt egy helyi értékkel az osztóban és az osztandóban is!

437,64 : 25 = Ez már elvégezhető és hányadosa megegyezik az előbbi osztás hányadosával.
437,64 : 25 = 17,5056

Az ellenőrzést az eredeti osztóval végezzük. Ell.: 17,5056 * 2,5 = 43,764

Jó az ellenőrzés, tehát valóban jó a hányadosunk.

2. 4 , 7 : 0 , 0 1 6 = Ez az osztás nem végezhető el.

Az osztóban **három** tizedes jegy van. Vigyük jobbra a tizedesvesszőt három helyi értékkel az osztóban és az osztandóban is!

4700 : 16 = Ez már elvégezhető és hányadosa megegyezik az előbbi osztás hányadosával.
4700 : 16 = 293,75 Az ellenőrzést az eredeti osztóval végezzük. Ell.: 293,75 * 0,016 = 4,7

Jó az ellenőrzés, tehát valóban jó a hányadosunk.

Amikor az osztandóban és az osztóban is ugyanannyi helyi értékkel jobbra visszük a tizedesvesszőt, az osztandót és az osztót is ugyanazzal a számmal szorozzuk. (10-zel, 100-zal, 1000-rel,…stb.) Ekkor azonban a hányados értéke nem változik Nem csoda tehát, hogy — amint az ellenőrzés is mutatja — jó hányadosokat kaptunk.

66. Közönséges tört felírása tizedes tört alakban.

Minden közönséges tört alakú szám felírható tizedes tört alakban úgy, hogy a tört számlálóját elosztjuk a nevezővel.

Példa: $\frac{3}{5} = 3:5 = 0{,}6$ $\frac{7}{8} = 7:8 = 0{,}875$ $\frac{15}{9} = 15:9 = 1{,}6666....$

$$\frac{23}{7} = 23:7 = 3{,}2857142....$$

A hányados lehet egész szám, véges tizedes tört és végtelen szakaszos tizedes tört.
Végtelen szakaszos tizedes tört: a hányadosban a tizedesvessző után egy számjegyből, vagy több számjegyből álló szakasz ismétlődik.
A végtelen szakaszos tizedes törtet a szakasz első és utolsó számjegye fölé tett ponttal jelölhetjük.

Példa: 15 : 9 = 1,6666666

2 : 7 = 0,285714285714285714285714...

$$15 : 9 = 1{,}\dot{6}$$

$$2 : 7 = 0{,}\dot{2}8571\dot{4}$$

67. Szorzás tíz hatványaival.

Végezzük el a következő szorzásokat!

34,654 * 100 = 3465,4

0,083 * 1000 = 83

237 * 10 = 2370

Vegyük észre, hogy a szorzandóban és a szorzatban ugyanazok a számjegyek vannak, csak más helyiérték-oszlopban. Ennek ismeretében 10-zel, 100-zal, 1000-rel,…stb. a „szorzás elvégzése nélkül" is szorozhatunk.

Szorzás 10 hatványaival (10-zel, 100-zal, 1000-rel,…stb.): 10 hatványaival úgy szorzunk, hogy a szorzandóban annyi helyi értékkel visszük **jobbra** a tizedesvesszőt, ahány nulla a szorzóban van. Az üres helyi értékeket 0-val töltjük ki.

Példa:

64,756 * 100 =

A szorzóban az 1-es után két nulla van. A szorzatot úgy kapjuk, hogy a szorzandóban két helyi értékkel jobbra visszük a tizedesvesszőt.

64,756 * 100 =6475,6

2,34 * 10000 =

A szorzóban az 1-es után négy nulla van. A szorzatot úgy kapjuk, hogy a szorzandóban négy helyi értékkel jobbra visszük a tizedesvesszőt. A két üres helyi értéket 0-val töltjük fel.

2,34 * 10000 = 23400

68. Osztás tíz hatványaival.

Végezzük el a következő osztásokat!

365,4 : 100 = 3,654

54,2 : 1000 = 0,0542

237 : 10 = 23,7

Észrevehetjük, hogy az osztandóban és a hányadosban ugyanazok a számjegyek vannak, csak más helyiérték-oszlopban. Ennek ismeretében 10-zel, 100-zal, 1000-rel,…stb. „osztás nélkül" is oszthatunk.

Osztás 10 hatványaival (10-zel, 100-zal, 1000-rel,…stb.): 10 hatványaival úgy osztunk, hogy az osztandóban annyi helyi értékkel visszük **balra** a tizedesvesszőt, ahány nulla az osztóban van. Az üres helyi értékeket 0-val töltjük ki.

Példa: 6479,6 : 100 =

Az osztóban az 1-es után két nulla van. A hányadost úgy kapjuk, hogy az osztandóban két helyi értékkel balra visszük a tizedesvesszőt.

6479,6 : 100 =64,796

2,34 : 10000 =

Az osztóban az 1-es után négy nulla van. A hányadost úgy kapjuk, hogy az osztandóban négy helyi értékkel balra visszük a tizedesvesszőt. Az üres helyi értékeket 0-val töltjük fel.

2,34 * 10000 = 0,000234

Három üres helyi érték van, de egy nullával jeleznünk kell azt is, hogy ebben a számban nincs egész.

69. Tizedes törtek bővítése:

Tizedes törtek bővítésekor a szám végére (a tizedesvesszőtől jobbra) tetszőleges sok nullát írhatunk, a szám értéke nem változik: 43,27 = 43,270 = 43,2700 = 43,27000…

70. Tizedes törtek egyszerűsítése:

Tizedes törtek egyszerűsítésekor a szám végén (a tizedesvesszőtől jobbra) álló nullákat elhagyhatjuk, a szám értéke nem változik: 8,5340000 = 8,534000 = 8,53400 = 8,5340 = 8,534

71. Tizedes törtek összehasonlítása. (Példa)

Két tizedes tört közül az a nagyobb, amelyiknek az egész része a nagyobb. Ha az egész részek egyenlők, akkor az a tizedes tört a nagyobb, amelynél a tizedes jegyeket balról jobbra összehasonlítva az első eltérő számjegy nagyobb.

Példa: 1. Melyik a nagyobb a következő két tizedes tört közül?

3672,38 625,83652785

Hasonlítsuk össze az egész részeket!

3672 > 625

3672,38 > 625,83652785

2. Melyik a nagyobb a következő két tizedes tört közül?

847352,38735692897 847352,38735836

Az egész részek egyenlők. Keressük meg az első eltérő tizedes jegyeket!

847352,38735692897
847352,38735836

A nyíllal jelzett számban nagyobb az első eltérő számjegy: 847352,38735692897 < 847352,38735836

A KEREKÍTÉS: Előfordul, hogy nem kell pontos adatokkal számolnunk, elég, ha a közelítő értéküket ismerjük. A számok közelítő értékének meghatározására szolgál a kerekítés. A közelítő érték meghatározásánál meg kell adni, hogy milyen helyi értékre kerekítünk. (Pl. tízesekre, ezresekre, századokra) Kerekítésnél a szám helyett, a szám közelebbi tízes, százas, ezres…stb. szomszédját mondjuk. Az adott helyi értéktől jobbra lévő oszlopokban található számjegyeket a kerekítés során „elhagyjuk”. A közelítő érték jele: ≈

72. Kerekítés felfelé:

Ha az első elhagyandó számjegy 5, vagy 5-nél nagyobb, akkor felfelé kerekítünk. Az utolsó megmaradó számjegyhez hozzáadunk 1-et. Az üres **egész** helyi értékekre 0-t írunk.

Példa: Kerekítsük a következő számot ezresekre! (Hogy el ne felejtsük, hogy hova kerekítünk, érdemes egy x-szel megjelölni a megfelelő helyi értéket, ezúttal az ezreseket.)

x
5 3 4 8 2 6 , 4 2 7 3

Az ezresektől jobbra lévő számjegyeket elhagyjuk. Nézzük az első elhagyandó számjegyet! Ez a 8-as. Nagyobb, mint négy, tehát felfelé kerekítünk. Az utolsó megmaradó számjegy a 4, ehhez hozzáadunk 1-et.

x
5 3 4 8 2 6 , 4 2 7 3 ≈ 5 3 5 0 0 0

73. Kerekítés lefelé:

Ha az első elhagyandó számjegy 5-nél kisebb, akkor lefelé kerekítünk. A megmaradó számjegyeket változatlanul leírjuk. Az üres **egész** helyi értékekre 0-t írunk

Példa: Kerekítsük a következő számot tizedekre! (Hogy el ne felejtsük, hogy hova kerekítünk, érdemes egy x-szel megjelölni a megfelelő helyi értéket, ezúttal a tizedeket.)

$$5\,3\,4\,8\,2\,6\,,\overset{x}{4}\,2\,7\,3$$

A tizedektől jobbra lévő számjegyeket elhagyjuk. Nézzük az első elhagyandó számjegyet! Ez a 2-es. Kisebb, mint öt, tehát lefelé kerekítünk.

$$5\,3\,4\,8\,2\,6\,,\overset{x}{4}\,2\,7\,3 \approx 5\,3\,4\,8\,2\,6\,,4$$

74. A mérés:

A mérés mindig összehasonlítás. A mérendő mennyiséget hasonlítjuk össze az egységgel, a mértékegységgel. A mérés eredménye a mérőszám, és a mértékegység

Mértékegység bármilyen a célnak megfelelő eszköz lehet. A különböző, eltérő egységek használata azonban káoszt okozna, ezért nemzetközileg elfogadott (úgynevezett SI) mértékegységeket használunk.

8 dkg

mérőszám mértékegység

75. A hosszúság mértékegységei, váltószámok

1mm	<	1cm	<	1dm	<	1m	<	1km
	10		10		10		1000	

76. A terület mértékegységei, váltószámok.

$1mm^2$	<	$1cm^2$	<	$1dm^2$	<	$1m^2$	<	1ha	<	$1km^2$
	100		100		100		10000		100	

(m^2 = négyzetméter, ha = hektár)

77. A térfogat mértékegységei, váltószámok

$1mm^3$	<	$1cm^3$	<	$1dm^3$	<	$1m^3$
	1000		1000		1000	

(m^3 = köbméter)

78. Az űrmérték mértékegységei, váltószámok.

(folyadékok mérésére használjuk)

1ml	<	1cl	<	1dl	<	1 l	<	1hl
	10		10		10		100	

Az űrtartalom és a térfogat mértékegységei átválthatók egymásba:

$$1\ dm^3 = 1\ l$$

79. A tömeg mértékegységei, váltószámok.

1g	<	1dkg	<	1kg	<	1q	<	1t
	10		100		100		10	

(q = mázsa nem SI mértékegység, de a mindennapi életben még használják.)

80. Az idő mértékegységei, váltószámok.

1mp	<	1perc	<	1óra	<	1nap	<	1hét	<	1hónap	<	1év
	60		60		24		7		≈4		12	

1 év ≈ 365 nap; 1 hónap ≈ 30 nap; 1 év ≈ 52 hét

(mp = s, vagy sec; perc = min; óra = h)

81. 82. Mértékváltás:

Két, nem „szomszédos” mértékegység közti váltószámot a köztük lévő váltószámok szorzata adja.

Példa: **1.** Mennyi a váltószám a cl és a hl között?

1ml	<	1cl	<	1dl	<	1 l	<	1hl
	10		10	*	10	*	100	

$$\underbrace{10 * 10 * 100}_{\underline{\underline{10000}}}$$

2. Mennyi a váltószám a cm^2 és a ha között?

$1mm^2$	<	$1cm^2$	<	$1dm^2$	<	$1m^2$	<	1ha	<	$1km^2$
	100		100	*	100	*	10000		100	

$$\underbrace{100 * 100 * 10000}_{\underline{\underline{100\ 000\ 000}}}$$

Ha nagyobb mértékegységről váltunk kisebbre, akkor szorozzuk a mérőszámot a váltószámmal.

Ha kisebb mértékegységről váltunk nagyobbra, akkor osztjuk a mérőszámot a váltószámmal.

Példa: **1.** 3650 mm = ……………m

Először határozzuk meg a váltószámot!

1000

Döntsük el, hogy nagyobbról kisebb mértékegységre váltunk, vagy fordítva!

Kisebbről nagyobbra, tehát osztanunk kell a váltószámmal.

„Kezdőknek” érdemes jelölni a váltószámot, és az elvégzendő műveletet a következőképpen:

: 1000

3650 mm = ……………m

3650 mm = 3,65 m

2.

*** 10000**

43 hl = …………..cl

43 hl = 430000 cl

3.

*** 168**

3 hét = ……………. óra

3 hét = 504 óra

4.

?

460000 cm^3 = …………….hl

Ezt az átváltást végezhetjük a következőképpen:

: 1000

460000 cm^3 = 460 dm^3

Felhasználjuk, hogy 1 dm^3 = 1 liter.

460 dm^3 = 460 l

: 100

460 l = 4,6 hl

Számhalmaz: olyan halmaz (csoport), amelynek minden eleme (tagja) szám. A következőkben néhány nevezetes számhalmazzal ismerkedünk meg. Mindegyik halmazt az ábécé egy nagybetűjével jelöljük.

Egy számhalmazban **korlátozás nélkül** elvégezhető egy művelet, ha bárhogyan is választunk ki számokat a halmazból, a művelet elvégzése után eredményül kapott szám is benne van a halmazban.

83. Mit tudsz a természetes számok halmazáról?

TERMÉSZETES SZÁMOK halmaza

Jele: **N**

A természetes számok halmazába a nulla és a pozitív egész számok tartoznak.

N = {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12…}

A természetes számok halmazának végtelen sok eleme van.

A legkisebb természetes szám a 0.

A természetes számok halmazának nincs legnagyobb eleme.

A természetes számok halmazában az összeadás, és a szorzás végezhető el korlátozás nélkül.

84. Mit tudsz az egész számok halmazáról?

EGÉSZ SZÁMOK halmaza

Jele: **Z**

Az egész számok halmazába a nulla és a pozitív egész számok, és a negatív egész számok tartoznak.

Z = {…-10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; …}

Az egész számok halmazának végtelen sok eleme van.

Az egész számok halmazának nincs sem legnagyobb, sem legkisebb eleme.

Az egész számok halmazában az összeadás, kivonás és a szorzás végezhető el korlátozás nélkül.

85. Mit tudsz a racionális számok halmazáról?

RACIONÁLIS SZÁMOK halmaza

Jele: **Q**

A racionális számok halmazába a nulla, a pozitív egész számok, a negatív egész számok, a pozitív törtek és a negatív törtek tartoznak.

Q = {nulla, pozitív egész számok, negatív egész számok, pozitív törtek, negatív törtek}

A racionális szám mindig fölírható két egész szám hányadosaként.

(Másképpen: A racionális szám mindig fölírható $\frac{a}{b}$ *alakban, ahol **a**, **b** eleme **Z**-nek, és* $b \neq 0$*.)*

A racionális számok halmazának végtelen sok eleme van.

A racionális számok halmazának nincs sem legnagyobb, sem legkisebb eleme.

A racionális számok halmazában az összeadás, kivonás, szorzás és osztás is elvégezhető korlátozás nélkül.

Nem végezhető el viszont korlátozás nélkül a négyzetgyökvonás.

86. 87. 88.

Minden törtszám fölírható tizedes tört alakban, úgy, hogy a számlálót elosztjuk a nevezővel. A hányados vagy egész szám, vagy véges tizedes tört, vagy végtelen szakaszos tizedes tört lesz.
Az, hogy a hányados véges-, vagy végtelen tizedes tört lesz-e, az osztás elvégzése nélkül is meghatározhatjuk.

A racionális szám tizedes tört alakja:

Legyen $\frac{a}{b}$ a racionális szám **legegyszerűbb** alakja.

a,b egész számok, $\mathbf{b \neq 0}$ és **(a;b) = 1**.

Az $\frac{a}{b}$ racionális szám tizedes tört alakja:

1. Véges tizedes tört, ha a nevező prímtényezős alakjában csak 2 vagy 5, illetve 2 és 5 prímtényezők szerepelnek.

2. a. Végtelen tiszta szakaszos tizedes tört, ha a nevező prímtényezői között sem a 2, sem az 5 nem szerepel.
A végtelen tiszta szakaszos tizedes törtben minden tizedes jegy ismétlődik.
Pl.: 54,325325325325…..

b. Végtelen vegyes szakaszos tizedes tört, ha a nevező prímtényezői között a 2 és/vagy 5-ön kívül más prímszám is szerepel.
A végtelen vegyes szakaszos tizedes törtben nem minden tizedes jegy ismétlődik.
Pl.: 9,5718181818…..

Példa:

Határozzuk meg az osztás elvégzése nélkül, hogy a következő racionális számok tizedes tört alakja véges-, vagy végtelen tizedes tört! **1.** $\frac{189}{420}$

Hozzuk a törtet a legegyszerűbb alakra! $\frac{189}{420} = \frac{9}{20}$

Írjuk fel a nevező prímtényezős alakját! $20 = 2 * 2 * 5$

A prímtényezős alakjában csak 2 és 5 szerepel, ezért a $\frac{189}{420}$ tizedes tört alakja véges tizedes tört. (0,45)

2.

$\frac{259}{429}$

Ez a tört nem egyszerűsíthető. Írjuk fel a nevező prímtényezős alakját! $429 = 3 * 11 * 13$

A prímtényezős alakjában sem 2 sem 5 nem szerepel, ezért:

A $\frac{259}{429}$ tizedes tört alakja végtelen tiszta szakaszos tizedes tört. (0,603729603729…)

3. $\frac{280}{3000}$

Hozzuk a törtet a legegyszerűbb alakra! $\frac{280}{3000} = \frac{7}{75}$

Írjuk fel a nevező prímtényezős alakját! $75 = 3 * 5 * 5$

A prímtényezős alakjában az 5 mellett 2-től különböző prímszám szerepel, ezért:

A $\frac{280}{3000}$ tizedes tört alakja végtelen vegyes szakaszos tizedes tört. (0,093333333333333….)

89. Mit tudsz az irracionális számok halmazáról?

IRRACIONÁLIS SZÁMOK halmaza

Jele: $\mathbf{Q}^*$

Az irracionális számok halmazába azok a számok tartoznak, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként.

Az irracionális számok halmazának végtelen sok eleme van.

Az irracionális számok halmazának nincs sem legnagyobb, sem legkisebb eleme.

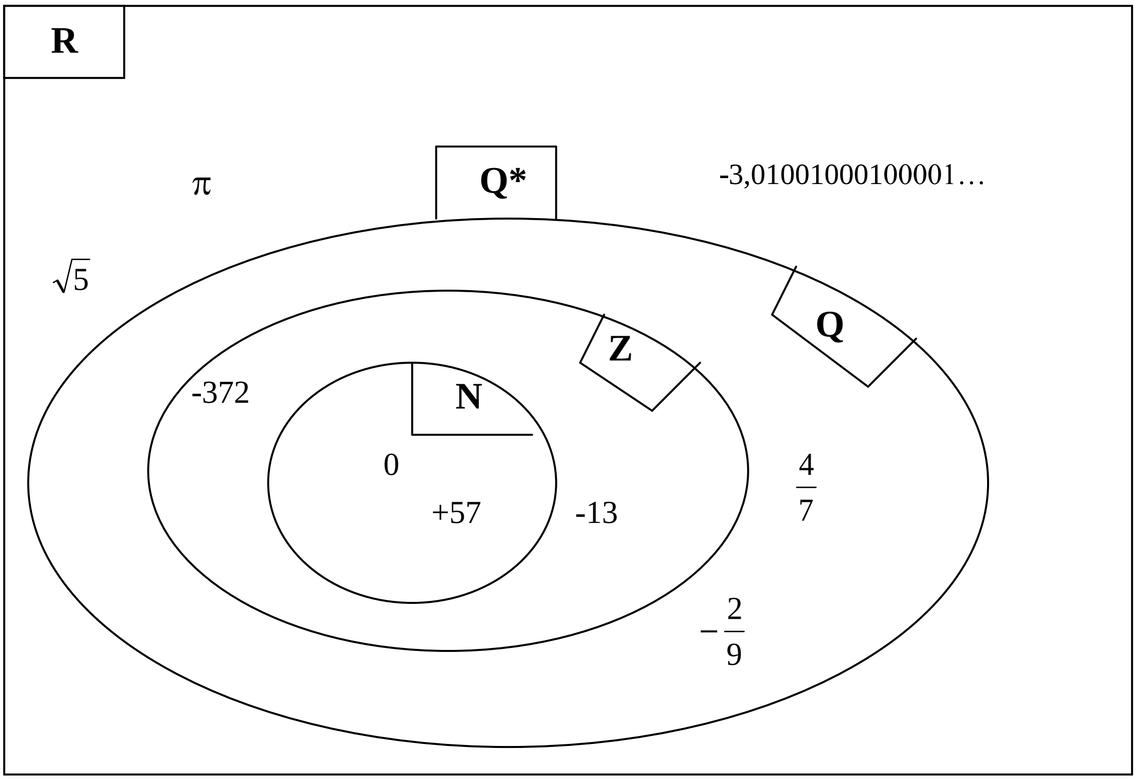
Az irracionális számok tizedes tört alakja: végtelen nem szakaszos tizedes tört.

Pl: 3,2122122212222122222 1….

90. Mit tudsz a valós számok halmazáról?

VALÓS SZÁMOK halmaza: Jele: **R** Ezt a számhalmazt a racionális és irracionális számok együtt alkotják.

A SZÁMHALMAZOK ÁBRÁZOLÁSA HALMAZÁBRÁN



MATEMATIKA I.

Hány óra van?
Bárcsak esne az eső!
Hozd ide a széket!
A bálna tengeri emlős.

Matematika órán kitüntetett szerepe van a kijelentő mondatnak, a többi mondatfajtához képest. Mégpedig azért, mert a többiekkel ellentétben minden kijelentő mondatnak van igazságértéke.

91. Az állítás igazságértéke.

A kijelentő mondatot a matematikában **állításnak** (ítéletnek) nevezzük. Az igazságérték azt jelenti, hogy minden kijelentő mondat **vagy igaz, vagy hamis**. Harmadik lehetőség nincs. (A kérdő, felszólító, felkiáltó, óhajtó mondatok nem rendelkeznek ezzel a tulajdonsággal.)

Nézzünk néhány állítást, és vizsgáljuk meg az igazságértéküket!

Magyarország fővárosa Kecskemét.	HAMIS
Egy évben 12 hónap van.	IGAZ
Hat nagyobb, mint kilenc.	HAMIS
A bálna tengeri emlős.	IGAZ
A Holdon még nem járt ember.	HAMIS
A Marson van élet.	Jelenlegi ismereteink szerint erre nem tudunk válaszolni, de az állítás ettől függetlenül vagy igaz, vagy hamis.

92. A nyitott mondat fogalma.

Az olyan állítást, amelynek nem ismerjük az alanyát, **nyitott mondat**nak nevezzük. A nyitott mondatnak nincs igazságértéke. A nyitott mondat se nem igaz, se nem hamis.

A következő mondatok nyitott mondatok:

Magyarország fővárosa ……………..
Egy évben 12 ………… van.
……….. nagyobb, mint kilenc.
A ………… tengeri emlős.
A Holdon még nem járt ……………..
A Marson van …………….

93. A nyitott mondat megoldása.

A nyitott mondat megoldása: A hiányzó alany helyére egy adott csoportból (halmazból) olyan elemet helyettesítünk, amellyel kiegészítve a mondatot, igaz állítást kapunk.

94. A nyitott mondat alaphalmaza, megoldáshalmaza.

Alaphalmaz: Az a halmaz, amelyben a nyitott mondat megoldásait keressük.
Megoldáshalmaz (igazsághalmaz): Az alaphalmaznak azok az elemei alkotják, amelyek igazzá teszik a nyitott mondatot.

Ha egy feladat nem adja meg az alaphalmazt, akkor mindig az értelem szerinti legnagyobb halmazt tekintjük annak.

95. Azonosság fogalma.

Ha az alaphalmaz minden eleme igazzá teszi a nyitott mondatunkat, akkor a nyitott mondat az adott alaphalmazon **azonosság**. Ilyenkor az alaphalmaz megegyezik a megoldáshalmazzal.

96. Mikor nincs megoldása a nyitott mondatnak?

Ha az alaphalmaz egyetlen eleme sem teszi igazzá a nyitott mondatunkat, akkor a nyitott mondatnak az adott alaphalmazon nincs megoldása. Ilyenkor a megoldáshalmaz üres halmaz.

Példa: **1.** Oldjuk meg a következő nyitott mondatot!

……….. nagyobb, mint kilenc.

Az alaphalmaz: A:={5; 13; -3; 24,6; 9; 0}

Az alaphalmaznak hat eleme van. Helyettesítsük be ezeket a hiányzó alany helyére!

5 nagyobb, mint kilenc.	HAMIS
13 nagyobb, mint kilenc.	IGAZ
-3 nagyobb, mint kilenc.	HAMIS
24,6 nagyobb, mint kilenc.	IGAZ
9 nagyobb, mint kilenc.	HAMIS
0 nagyobb, mint kilenc.	HAMIS

Az alaphalmaz elemei közül kettő teszi igazzá a nyitott mondatunkat: a 13 és a 24,6. Ez a két szám alkotja a nyitott mondat megoldáshalmazát. M={13; 24,6}

2. Oldjuk meg a következő nyitott mondatot!

……….. nagyobb, mint kilenc.

Az alaphalmaz: A:={25; 13; 37; 24,6; 19; 10; 325}

Az alaphalmaznak hét eleme van. Helyettesítsük be ezeket a hiányzó alany helyére!

25 nagyobb, mint kilenc.	IGAZ
13 nagyobb, mint kilenc.	IGAZ
37 nagyobb, mint kilenc.	IGAZ
24,6 nagyobb, mint kilenc.	IGAZ
19 nagyobb, mint kilenc.	IGAZ
10 nagyobb, mint kilenc.	IGAZ
325 nagyobb, mint kilenc.	IGAZ

Az alaphalmaz minden eleme igazzá teszi a nyitott mondatunkat. Az alaphalmaz minden eleme benne van a nyitott mondat megoldáshalmazában.

M={25; 13; 37; 24,6; 19; 10; 325}

M = A

Ezen az alaphalmazon a nyitott mondatunk azonosság.

3. Oldjuk meg a következő nyitott mondatot!

……….. nagyobb, mint kilenc.

Az alaphalmaz: A:={5; 3; 7; 9}

Az alaphalmaznak négy eleme van. Helyettesítsük be ezeket a hiányzó alany helyére!

5 nagyobb, mint kilenc.	HAMIS
3 nagyobb, mint kilenc.	HAMIS
7 nagyobb, mint kilenc.	HAMIS
9 nagyobb, mint kilenc.	HAMIS

Az alaphalmaz egyetlen eleme sem teszi igazzá a nyitott mondatunkat. A nyitott mondat megoldáshalmaza üres halmaz. M={}

Ezen az alaphalmazon a nyitott mondatunknak nincs megoldása.

4. Oldjuk meg a következő nyitott mondatot!

……….. nagyobb, mint kilenc.

Most nem adunk meg alaphalmazt. Ilyenkor a legnagyobb, a feladat szempontjából értelmesnek tűnő halmazban kell keresni a megoldást. Jelen esetben az összes tanult számot számításba vesszük a megoldáskeresésnél. (Nem keressük viszont a megoldást, például a magyarországi városok csoportjában.)

Esetünkben a nyitott mondatnak végtelen sok megoldása van, hiszen bármely 9-nél nagyobb számot behelyettesítve IGAZ állítást kapunk. Ha megnézzük a számegyenest, láthatjuk, hogy végtelen sok ilyen szám van. Matematikában a nyitott mondatokat rövid formában, a tanult jelek segítségével írjuk le. Az ismeretlen alanyt általában x, y, z betűkkel helyettesítjük.

A következő nyitott mondatot:

……….. nagyobb, mint kilenc.

Helyesen így írjuk: $\mathbf{x > 9}$.

97. Egyenlet, egyenlőtlenség fogalma.

Ha a nyitott mondat állítmánya „egyenlő” (=), akkor a nyitott mondat **egyenlet**.

A következő nyitott mondatok egyenletek: $x + 5 = 2x + 1$

$$3y - 2 = y + 6$$

$$6 - 3z = z - 2$$

Ha a nyitott mondat állítmánya „kisebb, nagyobb, nem kisebb, nem nagyobb” (<, >, ≥, ≤), akkor a nyitott mondat **egyenlőtlenség**.

A következő nyitott mondatok egyenlőtlenségek:

$$x + 5 < 2x + 1$$

$$3y - 2 \geq y + 6$$

$$6 - 3z \leq z - 2$$

98. Az egyenlet, egyenlőtlenség gyöke.

*Az egyenlet, egyenlőtlenség megoldáshalmazának elemeit szokás az **egyenlet, egyenlőtlenség gyöke**inek is nevezni.*

99. Zárójelbontás az egyenlet megoldása közben.

12 + 3*(2x – 3) + 1 = 2*(x + 5) + x + (2x + 4)

Itt egy újabb nehézséggel találkozunk. Zárójel van az egyenletben. A továbblépéshez „fel kell bontani" a zárójelet. *Általában a tényező és a zárójel közti szorzásjelet nem szoktuk kitenni. Az egyenlettel a későbbiekben ilyen formában találkozunk:*

12 + 3(2x – 3) + 1 = 2(x + 5) + x + (2x + 4)

Zárójelbontás: A zárójelen belül lévő minden tagot szorozzuk a zárójelen kívül levő tényezővel. *(Lásd: összeg szorzása egy számmal.)*

Példa: Oldjuk meg a következő feladatokat kétféleképpen!

1. **a.** Először ügyeljünk a műveleti sorrendre!

4*(8 – 2) = 4*6 = **24**

b. Most nézzük zárójelbontással!

4 * (8 – 2) = 4*8 – 4*2= 32 – 8 = **24**

Az eredmény ugyanaz, tehát jól működik a zárójelbontás.

2. **a.** Először ügyeljünk a műveleti sorrendre!

7 + 5*(3 + 1) = 7 + 5*4 = 7 + 20 = **27**

b. Most nézzük zárójelbontással!

7 + **5 * (3 + 1)** = 7 + **5*3 + 5*1** = 7 + 15 + 5 = **27**

Az eredmény ugyanaz, tehát jól működik a zárójelbontás.

Térjünk vissza az egyenletünkhöz! 12 + 3*(2x – 3) + 1 = 2*(x + 5) + x + (2x + 4)

Alkalmazzuk a zárójelbontást!

3*(2x – 3) = **6x – 9**

2*(x + 5) = **2x + 10**

A következőnél nem kell szorozni, egyszerűen elhagyjuk a zárójelet.

(2x + 4) = **2x + 4**

Zárójelbontás után így néz ki az egyenlet:

12 + **6x – 9** + 1 = **2x + 10** +x + **2x + 4**

Rendezni kell az egyenletet, és kezdődhet a megoldás.

Oldjuk meg a következő egyenletet!

8 **–** 3*(4 + 2x) + 5(x – 2) = 6x **–** 2*(7 – 3x) **–** (2x + 4)

Ebben az egyenletben tovább bonyolítja a helyzetet, hogy a zárójel előtt, vagy a zárójelet megelőző szorzótényező előtt kivonásjel van.

Zárójelbontás: A zárójelen belül lévő minden tagot megszorozzuk a zárójelen kívül levő tényezővel. Ha a zárójel előtt, vagy a zárójelet megelőző szorzótényező előtt kivonásjel van, akkor a zárójelbontás során a zárójelben lévő összeadásjel kivonásjellé, a zárójelben lévő kivonásjel, pedig összeadásjellé változik.

Példa: **1.** Oldjuk meg a következő feladatot kétféleképpen!

a. Először ügyeljünk a műveleti sorrendre!

40 – 4*(8 – 2) = 40 – 4*6 = 40 – 24 = **<u>16</u>**

b. Most nézzük zárójelbontással! Figyeljünk a zárójel előtti kivonásjelre!

40 – 4*(8 – 2) = 40 – 4*8 + 4*2 =

= 40 – 32 + 8 = **<u>16</u>**

Az eredmény ugyanaz, tehát jól működik a zárójelbontás.

2. Oldjuk meg a következő feladatot kétféleképpen!

a. Először ügyeljünk a műveleti sorrendre!

50 – 3*(7 + 3) = 50 – 3*10 = 50 – 30 = **<u>20</u>**

b. Most nézzük zárójelbontással! Figyeljünk a zárójel előtti kivonásjelre!

50 – 3*(7 + 3) = 50 – 3*7 – 3*3 =

= 50 – 21 – 9 = **<u>20</u>**

Az eredmény ugyanaz, tehát jól működik a zárójelbontás.

<u>Térjünk vissza az egyenletünkhöz!</u>

8 – 3*(4 + 2x) + 5(x – 2) = 6x – 2*(7 – 3x) – (2x + 4)

Alkalmazzuk a zárójelbontást! Figyeljünk a zárójel előtti kivonásjelre!

8 – 3*(4 + 2x) + 5(x – 2) = 6x – 2*(7 – 3x) – (2x + 4)

8 – 12 – 6x + 5x – 10 = 6x – 14 + 6x – 2x – 4

Rendezni kell az egyenletet, és kezdődhet a megoldás.

<u>100. Közös törtvonal elhagyása az egyenletmegoldás közben.</u>

Oldjuk meg a következő egyenletet! $4+\frac{3x+6}{2}=5+2x+1$

Nehezíti a helyzetet, az egyenletben megjelenő törtalakú kifejezés. Ezt a törtet el kell tüntetnünk, de hogyan?
Használjuk fel a következőt: Ha a törtet a nevezőjével szorozzuk, eredményül mindig a számlálót kapjuk:

$$\frac{\mathbf{2}}{7} * 7 = \frac{2*7}{7} = \mathbf{2} \qquad \frac{\mathbf{3}}{5} * 5 = \frac{3*5}{5} = \mathbf{3}$$

Szorozzuk az egyenlet mindkét oldalát a tört nevezőjével!

$$4 + \frac{3x+6}{2} = 5 + 2x + 1 \qquad // *2$$

Mindkét oldalon minden tagot szorzunk 2-vel. Eltűnik a tört:

8 + 3x + 6 = 10 + 4x + 2

Ennek az egyenletnek a megoldása már nem okoz nehézséget.
A törtvonal eltüntetésénél azonban egy dologra ügyelnünk kell. A közös törtvonal zárójelet helyettesít. Az előbbi egyenletünket így is írhatnánk.

4 + (3x + 6) : 2 = 5 + 2x + 1

Ha a közös törtvonal eltüntetjük, olyan mintha zárójelet bontanánk. Alkalmaznunk kell tehát a zárójelbontás szabályait.

Oldjuk meg a következő egyenletet! $$4 - \frac{3x+6}{2} = 5 + 2x + 1 \qquad // *2$$

Most a közös törtvonal (zárójel) előtt kivonásjel van, ezért a számlálóban lévő összeadásjel kivonásjellé változik.

8 – 3x – 6 = 10 + 4x + 2

Oldjuk meg a következő egyenletet! $$5 + \frac{3x-5}{4} = 3 - \frac{2x-4}{3}$$

Ha egynél több tört van az egyenletben, akkor célszerű közös nevezőre hozni őket, majd ezzel a közös nevezővel beszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát. A közös nevező most a 12. A baloldalon lévő törtet 3-mal, a jobboldalit 4-gyel bővítjük.

$$5 + \frac{9x-15}{12} = 3 - \frac{8x-16}{12} \qquad // * 12$$

60 + 9x – 15 = 36 – 8x + 16
Ez már nem okozhat nehézséget.

101. Mire kell ügyelni az egyenlőtlenség mérlegelvvel történő megoldása során?

Mindenben ugyanúgy járunk el mint az egyenlet megoldása során.
VIGYÁZAT!!
Ha az egyenlőtlenséget negatív számmal osztjuk, vagy szorozzuk, akkor a relációjelet meg kell fordítanunk!

Példa: -2x > 10 // : (-2)

<u>x < -5</u>

(Nézzük számokkal, így talán hihetőbb!

-4 > -6 // : (-2)

+2 < + 3

Ahhoz, hogy igaz maradjon az állítás, meg kellett fordítani a relációjelet.)

102. Végtelen alaphalmaz esetén hogyan derül ki az egyenletről, egyenlőtlenségről, hogy azonosság, azonos egyenlőtlenség?

Ha az egyenlet, egyenlőtlenség megoldása során az ismeretlen kiesik, és igaz állítást kapunk,
Pl.:
$5 = 5$
$6 > -2$
$2 < 13{,}64$
akkor azonossággal, azonos egyenlőtlenséggel van dolgunk.

103. Végtelen alaphalmaz esetén hogy derül ki az egyenletről, egyenlőtlenségről, hogy nincs megoldása?

Ha az egyenlet, egyenlőtlenség megoldása során az ismeretlen kiesik, és hamis állítást kapunk,
Pl.:
$5 = 3$
$-6 > 0$
$22 < 13{,}64$
akkor az egyenletnek, egyenlőtlenségnek nincs megoldása.

104. Szöveges feladat megoldása egyenlettel.

A megoldás során érdemes a következő sorrendet betartani.

1. Olvassuk el figyelmesen a feladat szövegét és próbáljuk megérteni az ott leírtakat!
2. Döntsük el, hogy mi legyen az ismeretlen! A legtöbb esetben azt a mennyiséget célszerű ismeretlennek választani, amire a kérdés vonatkozik, de előfordulhat, hogy más mennyiséget választva ismeretlennek a feladat megoldása egyszerűbbé válik.
3. Keressünk összefüggést az adatok között! Az összefüggéseket célszerű táblázatba foglalni. Geometriai típusú feladatnál mindig készíts ábrát!
4. A táblázat, illetve a feladat szövege alapján írjuk fel az egyenletet, majd oldjuk meg!
5. Vizsgáljuk meg, hogy a kapott eredmény megfelel-e a feladatban leírtaknak! Pl. tömeg negatív szám, vagy személyek száma tört. Ilyen esetben a szöveg ismételt elolvasása után el kell döntenünk, hogy a feladatnak nincs megoldása, vagy esetleg kerekítéssel megkaphatjuk a megoldást.
6. A megoldást ellenőrizni kell. Ügyeljünk arra, hogy ne az általunk felírt egyenletbe helyettesítsünk be, hanem a szöveg alapján ellenőrizzünk!
7. A feladatban feltett kérdésre adjunk szöveges választ!

Példa: *Az első istállóban 20-szal több ló van, mint a másodikban. Ha az elsőbe még 8, a másodikba még 2 lovat visznek, akkor az első istállóban háromszor annyi ló lesz, mint a másodikban. Hány ló van most az egyes istállókban?*

Jelöljük x-szel az eredetileg a második istállóban lévő lovak számát, és foglaljuk táblázatba az összefüggéseket!

	I. istálló		II. istálló
1.	$x + 20$		x
2.	$(x + 20) + 8$	> háromszorosa	$x + 2$

Írjuk fel az egyenletet, és oldjuk meg! $(x + 20) + 8 = (x + 2) * 3$

$x + 20 + 8 = 3x + 6$

$x + 28 = 3x + 6 \quad // - x$

$28 = 2x + 6 \quad // - 6$

$22 = 2x \quad // : 2$

$\underline{11 = x}$

Ez az eredmény nem mond ellent a szövegnek, de nézzük meg, hogy jó-e? Ellenőrzés:

I. istálló		II. istálló
11+ 20		11
(11 + 20) + 8	>	11 + 2
39	háromszorosa	13

A szövegben a második istállóban eredetileg lévő lovak helyére 11-et helyettesítve, a feladat minden feltétele teljesül. Jöhet a szöveges válasz.

<u>Jelenleg az első istállóban 39, a másodikban 13 ló van.</u>

Ha egy szöveges feladatot egyenlőtlenséggel lehet megoldani, ugyanígy kell eljárni.

<u>105. Mennyi 40-nek a háromötöd része? (Mintapélda, 3-féle megoldással)</u>

Mennyi 40 korongnak a $\frac{3}{5}$ része? (Próbáljuk megérteni a feladatot részletes rajz segítségével!)

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○
○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

Számítsuk ki először a korongok $\frac{1}{5}$ részét!

Bármely mennyiség egy ötöd részét megkapjuk, ha a mennyiséget öt egyenlő részre osztjuk.
Osszuk el öt egyenlő részre a korongokat!

○○○○ ○○○○ ○○○○ ○○○○ ○○○○
○○○○ ○○○○ ○○○○ ○○○○ ○○○○

40-nek az $\frac{1}{5}$ része 8. 40-nek az $\frac{1}{5}$ része 8. 40-nek az $\frac{1}{5}$ része 8. 40-nek az $\frac{1}{5}$ része 8. 40-nek az $\frac{1}{5}$ része 8.

40-nek a $\frac{1}{5} * 3 = \frac{3}{5}$ része: 8*3 = 24

Nézzük a következő szorzatot! $40 * \frac{3}{5} = 24$ 40-nek a $\frac{3}{5}$-szerese 24.

Ez a szorzat megegyezik 40-nek a $\frac{3}{5}$ részével.

Tehát:

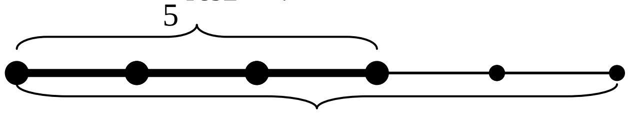
40-nek a $\frac{3}{5}$ része és $\frac{3}{5}$-szerese is 24.

Ezt a felismerést felhasználhatjuk a törtrészszámításnál. Térjünk vissza a feladatra!

Mennyi 40-nek a $\frac{3}{5}$ része? (*Mennyi 40-nek a $\frac{3}{5}$- szerese?*)

Segíthet egy egyszerű rajz! Ha gondot okoz a megoldás, rajzoljunk!

$\frac{3}{5}$ rész = ?



$40 = \frac{5}{5}\,rész$

a. (40 : 5) * 3 = 24

b. Következtetés: Számítsuk ki 40-nek az $\frac{1}{5}$ részét, majd vegyük ennek a 3-szorosát!

$\frac{1}{5}$ rész — 40 : 5 = 8

$\frac{3}{5}$ rész — 8 * 3 = 24

(40 : 5) * 3 = 24

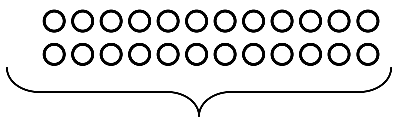
c. Felhasználjuk, hogy 40-nek a $\frac{3}{5}$ része és $\frac{3}{5}$-szerese is 24.

Számítsuk ki 40-nek a $\frac{3}{5}$ - szeresét! $40 * \frac{3}{5} = \mathbf{24}$

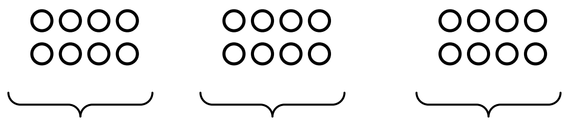
40-nek a $\frac{3}{5}$ része **24**.

106. Melyik szám háromötöd része a negyven? (Mintapélda, 3-féle megoldással)

Hány korongnak a $\frac{3}{5}$ része a 24? (Próbáljuk megérteni a feladatot részletes rajz segítségével!)

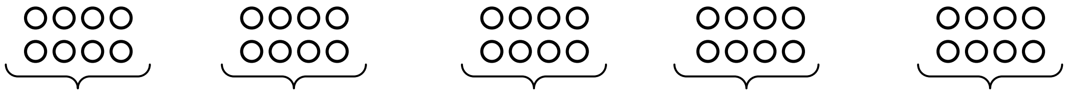


A $\frac{3}{5}$ részt három egyenlő részre osztva megkapom a keresett mennyiség $\frac{1}{5}$ részét.



$\frac{1}{5}$ rész: 8 $\frac{1}{5}$ rész: 8 $\frac{1}{5}$ rész: 8

Az egészet, az $\frac{5}{5}$ részt, azaz $\frac{1}{5}$ * 5 részt keressük..



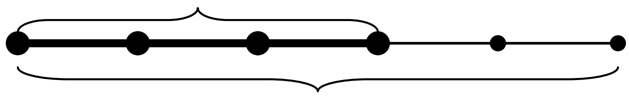
$\frac{1}{5}$ rész $\frac{1}{5}$ rész $\frac{1}{5}$ rész $\frac{1}{5}$ rész $\frac{1}{5}$ rész

$\frac{5}{5}$ rész = 8 * 5 = 40

Térjünk vissza a feladatra!

Mennyinek a $\frac{3}{5}$ része 24? (*Mennyinek a $\frac{3}{5}$- szerese 24?*)

$$24 = \frac{3}{5}\text{rész}$$



$$\frac{5}{5}\text{rész} = ?$$

a. **(**24 : 3) * 8 = 40

b. Következtetés:

A 24 a keresett szám $\frac{3}{5}$ része. Ha elosztjuk 3 részre, akkor a keresett szám $\frac{1}{5}$ részét kapjuk. Ennek az ötszöröse adja a megoldást.

$\frac{1}{5}$ rész — 24 : 3 = 8

$\frac{5}{5}$ rész — 8 * 5 = 40

(24 : 3) * 5 = 40

c. Felhasználjuk, hogy 40-nek a $\frac{3}{5}$ része és $\frac{3}{5}$-szerese is 24.

Oldjuk meg a feladatot egyenlettel! A következő kérdésre keressük a választ:

Mennyinek a $\frac{3}{5}$- szerese 24?

A következő szorzatot használjuk fel a megoldáshoz:

A keresett számot jelöljük x –szel.

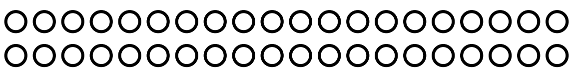
$$x * \frac{3}{5} = 24 \qquad // : \frac{3}{5}$$

$$x = 40$$

40-nek a $\frac{3}{5}$ része 24.

107. Hányad része a 40-nek a 24? (Mintapélda, 2-féle megoldással)

Hányad része 40 korongnak a 24? (Próbáljuk megérteni a feladatot részletes rajz segítségével!)



Az könnyen belátható, hogy 1 korong a 40-nek az $\frac{1}{40}$ része: 40 : 40 = 1

○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész	$\frac{1}{40}$ rész

24 korong

$\frac{1}{40} * 24 = \frac{24}{40}$ rész

1 korong — $\frac{1}{40}$ rész

24 korong — $\frac{1}{40} * 24 = \frac{24}{40}$ rész

Térjünk vissza a feladatra!

Hányad része 40-nek a 24? (*Hányszorosa 40-nek a 24?*)

a. Az ilyen kérdésre a válasz mindig egy olyan tört, amelynek a nevezője a -nak, -nek ragos szám, a számlálója, pedig a kérdésben szereplő másik szám:

Vagyis $\frac{24}{40}$ része 40-nek a 24. (Egyszerűsítés után: $\frac{3}{5}$ része 40-nek a 24.)

b. Felhasználjuk, hogy 40-nek a $\frac{3}{5}$ része és $\frac{3}{5}$-szerese ugyanannyi.

Oldjuk meg a feladatot egyenlettel! A következő kérdésre keressük a választ:

Hányszorosa 40-nek a 24?

A következő szorzatot használjuk fel a megoldáshoz: 40-nek valahányszorosa a 24.

A keresett számot jelöljük x –szel.

$$40 * x = 24 \qquad // : 40$$

$$x = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$$

40-nek a $\frac{3}{5}$ része 24.

108. A százalékszámításban szereplő mennyiségek.

A százalékszámítás olyan törtrész számítás, ahol mindig századrészt számolunk.

Egy mennyiség $\frac{7}{100}$ része egyenlő a 7 százalékával,

$\frac{19}{100}$ része egyenlő a 19 százalékával,

$\frac{52}{100}$ része egyenlő az 52 százalékával.

A százalék jele: **%**

300-nak a 15 %-a a 45.

százalékalap százalékláb százalékérték

A százalékszámításnál szereplő mennyiségek:
Százalékérték (jele legyen: szé).
Százalékalap (jele legyen: a) *Szövegben a -nak, -nek rag toldható utána. Mindig a 100 %-hoz tartozó érték.*
Százalékláb (jele legyen :szl) *A % jelről ismerhető fel.*

109. Törtrész megadása százalék alakban.

Minden törtrész megadható % alakban. A számlálót elosztjuk a nevezővel, a kapott hányadost szorozzuk 100-zal.

Egy mennyiség

$\frac{3}{4}$ része *(3 : 4) * 100= 0,25 *100* egyenlő a 25 %-ával.

Egy mennyiség

$\frac{13}{20}$ része *(13 : 20) * 100= 0,65 *100* egyenlő a 65 %-ával.

Egy mennyiség

$\frac{2}{7}$ része *(2 : 7) * 100= 0,2857 *100* közelítőleg egyenlő a 28,6 %-ával.

Egy mennyiség

0,378 része 0,378 * 100 egyenlő a 37,8 %-ával.

110. A százalékérték kiszámítása

Mennyi 300-nak a 15%-a? (*Mennyi 300-nak a* $\frac{15}{100}$ *- része?)*

a. (300:100)*15 = 45

b.

Képlet:

sza = 300
szl = 15
szé = ?

$$szé = \frac{a * szl}{100}$$

$$szé = \frac{300 * 15}{100}$$

$$\underline{\underline{szé = 45}}$$

c.

Következtetés:

100 % — 300

1 % — 300 : 100 = 3

15 % — 3 * 15 = 45

d.

A törtrész számolásnál tanultakat alkalmazzuk. 300-nak a $\frac{15}{100}$-szorosát keressük.

$$300 * \frac{15}{100} = \underline{\underline{45}}$$

Tizedes tört alakban egyszerűbb:

300 * 0,15 = 45

300-nak a 15 %-a 45.

111. A százalékalap kiszámítása

Mennyinek a 15 %-a a 45? (*Mennyinek a* $\frac{15}{100}$ *-része a 45?)*

a. (45 : 15) * 100 = 300

b.

Képlet:

sza = x
szl = 15
szé = 45

$$szé = \frac{a * szl}{100}$$

$$45 = \frac{x * 15}{100}$$

$$45 = 0{,}15x \qquad // : 0{,}15$$

$$\underline{\underline{300 = x}}$$

c.

Következtetés:

15 % — 45

1 % — 45 : 15 = 3

100 % — 3 * 100 = 300

d.

A törtrész számolásnál tanultakat alkalmazzuk: Melyik szám $\frac{15}{100}$ - szorosa a 45? A keresett számot jelöljük x-szel!

$$x * \frac{15}{100} = 45$$

Tizedes tört alakban egyszerűbb.

x * 0,15 = 45 // : 0,15

x = 300

300-nak a 15 %-a 45.

112. A százalékláb kiszámítása

Hány %-a 300-nak a 45? (*Hány századrésze 300-nak a 45?)*

a. Adjuk meg a törtrészt, majd váltsuk át %-ra! $\frac{45}{300} = 45 : 300 = 0{,}15$ 0,15*100 = 15%

b.

Képlet:

sza = 300
szl = x
szé = 45

$$szé = \frac{a * szl}{100}$$

$$45 = \frac{300 * x}{100}$$

$$45 = 3x \qquad // : 3$$

$$15 = x$$

c.

A törtrészt számolásnál tanultakat alkalmazzuk: Hány századszorosa a 300-nak a 45?

$$300 * \frac{x}{100} = 45$$

3x = 45 //:3

x = 15

300-nak a 15 %-a 45.

113. Az arány fogalma.

Két szám **aránya** nem más, mint két szám hányadosa.

$$a : b = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

Az a és b szám aránya $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$.

Két szám aránya megmutatja, hogy az első szám hányszorosa a másodiknak.

Az osztás tulajdonságából következik, hogy az arány „bővíthető” és „egyszerűsíthető”.
A 10 : 5 arány egyenlő a 30 : 15 és a 2 : 1 aránnyal.

Példa: $6 : 3 = 2$

A 6 és 3 aránya 2. (Ez az arány megmutatja, hogy a 6 kétszerese a 3-nak.)

$$7 : 5 = \frac{7}{5}$$

A 7 és 5 aránya $\frac{7}{5}$.

(Ez az arány megmutatja, hogy a 7, $\frac{7}{5}$ - szerese az 5-nek.)

114. Aránypár

Ha két arányt egyenlőségjellel összekapcsolunk, aránypárt kapunk.

beltagok

$$a : b = c : d$$

kültagok

Az aránypár beltagjainak szorzata egyenlő a kültagok szorzatával: $b * c = a * d$

Az „aránypáros” feladatoknál három tag ismeretében a kültagok és beltagok közötti összefüggés felhasználásával számítjuk ki az ismeretlen negyedik tagot.

Példa: Két szám aránya 5 : 30. A nagyobb szám a 150, melyik a kisebb?
A keresett számot jelöljük x-szel. Az arányból látszik, hogy a kisebb szám van elől.

Írjuk fel az aránypárt! $x : 150 = 5 : 30$

Használjuk fel, hogy „Az aránypár beltagjainak szorzata egyenlő a kültagok szorzatával”.

$$30 * x = 150 * 5$$

$$30x = 750$$

$$\underline{\underline{x = 25}}$$

<u>A kisebb szám a 25.</u>

115. Arányos osztás (Mintapélda)

Példa: **1.** Osszunk fel 4000 Ft-ot Anna, Béla, Cecil és Dénes között 2 : 6 : 7 : 5 arányban! Hány forintot kapnak az egyes gyerekek?

Négy gyerek közt kell felosztani a pénzt, de nem egyenlő arányban. Tegyük fel, hogy a pénzt borítékokban kapják. Minden borítékban ugyanannyi pénz van. Az ilyen feladatoknál ügyeljünk a sorrendre! A felsorolásban Anna van elől, övé a 2 boríték, Béla követi, 6 borítékkal. Cecil 7 borítékot, a sorban utolsó Dénes 5 borítékot kap. Az egy borítékban levő pénzt jelöljük x-szel.

Anna	Béla	Cecil	Dénes

Pénze:	2x	6x	7x	5x

Mivel rajtuk kívül más nem kapott a pénzből, igaz a következő:

$$2x + 6x + 7x + 5x = 4000$$

$$20x = 4000$$

$$x = 200$$

Egy borítékban ezek szerint 200 Ft van.

<u>Anna 400, Béla 1200, Cecil 1400, Dénes 1000 Ft-ot kapott.</u>

Ellenőrzés: 400 + 1200 + 1400 + 1000 = 4000

2. Edit, Feri és Gábor életkorának aránya 5 : 7 : 4. Feri 28 éves. Hány évesek a többiek?

(Edit életkorát 5, Feriét 7, Gáborét 4 részre osztottuk. Minden rész egyenlő. Egy rész értéke legyen x.)

	E	F	G
Életkoruk:	5x	7x	4x

$$7x = 28$$
$$x = 4$$

<u>Edit 20, Gábor 16 éves.</u>

116. Az egyenes arányosság fogalma, kapcsolat két egyenesen arányos mennyiség összetartozó értékei között.

Két mennyiség között lehet olyan szoros kapcsolat, hogy az egyik mennyiség változása egyértelműen maga után vonja a hozzá tartozó másik mennyiség változását.
Ilyen erős kapcsolatokról lesz szó az alábbiakban.

Egyenes arányosság:

Az összetartozó értékpárok között egyenes arányosság van,

— ha az egyik mennyiség valahányszorosára nő, akkor a másik mennyiség is ugyanannyiszorosára nő

vagy

— ha az egyik mennyiség valahányad részére csökken, akkor a másik mennyiség is ugyanannyiad részére csökken.

Egyenes arányosság van például a kenyér ára és tömege között.

:2 *8 :12 *30

Ár (Ft)	150	75	600	50	1500	0
Tömeg (kg)	1	0,5	4	$\frac{1}{3}$	10	0

:2 *8 :12 *30

Ár : tömeg	150	150	150	150	150	—

A táblázatból látható, hogy az utolsó oszlop kivételével az ár és tömeg aránya megegyezik. Ez általánosan is igaz.

Az egyenes arányosságban a két változó mennyiség 0-tól különböző **összetartozó értékeinek aránya** (hányadosa) állandó.

117. Egyenes arányosság (Mintapélda, 3-féle megoldással)

Ha 6 kg alma ára 480 Ft, mennyit kell fizetnünk 7 kg ugyanilyen almáért?

a. Következtetéssel:

6 kg ———— 480 Ft

1 kg ———— 480:6 = 80 Ft

7 kg ———— 80 * 7 = 560 Ft

7 kg alma 560 Ft.

b. Felhasználva, hogy „Az egyenes arányosságban a két változó mennyiség 0-tól különböző összetartozó értékeinek aránya (hányadosa) állandó.”

6 kg ———— 480 Ft

7 kg ———— x Ft

$$\frac{x}{7} = \frac{480}{6}$$

$$x = 560$$

7 kg alma 560 Ft.

c. Keresztbe szorzással:

6 kg ———— 480 Ft

7 kg ———— x Ft

$$6 * x = 480 * 7$$

$$6x = 3360$$

$$x = 560$$

7 kg alma 560 Ft.

118. A fordított arányosság fogalma, kapcsolat két fordítottan arányos mennyiség összetartozó értékei között.

Fordított arányosság: Az összetartozó értékpárok között fordított arányosság van,
- ha az egyik mennyiség valahányszorosára nő, akkor a másik mennyiség ugyanannyiad részére csökken.

vagy

- ha az egyik mennyiség valahányad részére csökken, akkor a másik mennyiség ugyanannyiszorosára nő.

Fordított arányosság van például a kert ásásához szükséges idő és a munkások száma között. Feltesszük, hogy mindenki egyformán dolgozik.

:2 :6 *3 :5

Idő (óra)	60	30	5	15	3	0
Munkások száma (fő)	1	2	12	4	20	0

*2 *6 :3 *5

Idő*m.sz.	60	60	60	60	60	0

A táblázatból látható, hogy az utolsó oszlop kivételével az idő és a munkások számának szorzata megegyezik. Ez általánosan is igaz.

Fordított arányosságban a két változó mennyiség 0-tól különböző **összetartozó értékeinek szorzata** állandó.

119. Fordított arányosság (Mintapélda, 2-féle megoldással)

Két város között az utat 60 km/h sebességgel haladva 7 óra alatt teszi meg az autó. Mennyi ideig tart az út, ha 80 km/h sebességgel halad?

a. Következtetéssel:

60 km/h ———————— 7 h

10 km/h ———————— 42 h

80 km/h ———————— 5,25 h

80 km/h sebességgel az út 5 és negyed óráig tart.

b. Felhasználva, hogy „Fordított arányosságban a két változó mennyiség 0-tól különböző összetartozó értékeinek szorzata állandó.”

60 km/h ———————— 7 h

80 km/h ———————— x h

$$80 * x = 60 * 7$$

$$80x = 420$$

$$x = 5{,}25$$

80 km/h sebességgel az út 5 és egynegyed óráig tart.

120. Derékszögű koordináta-rendszer.

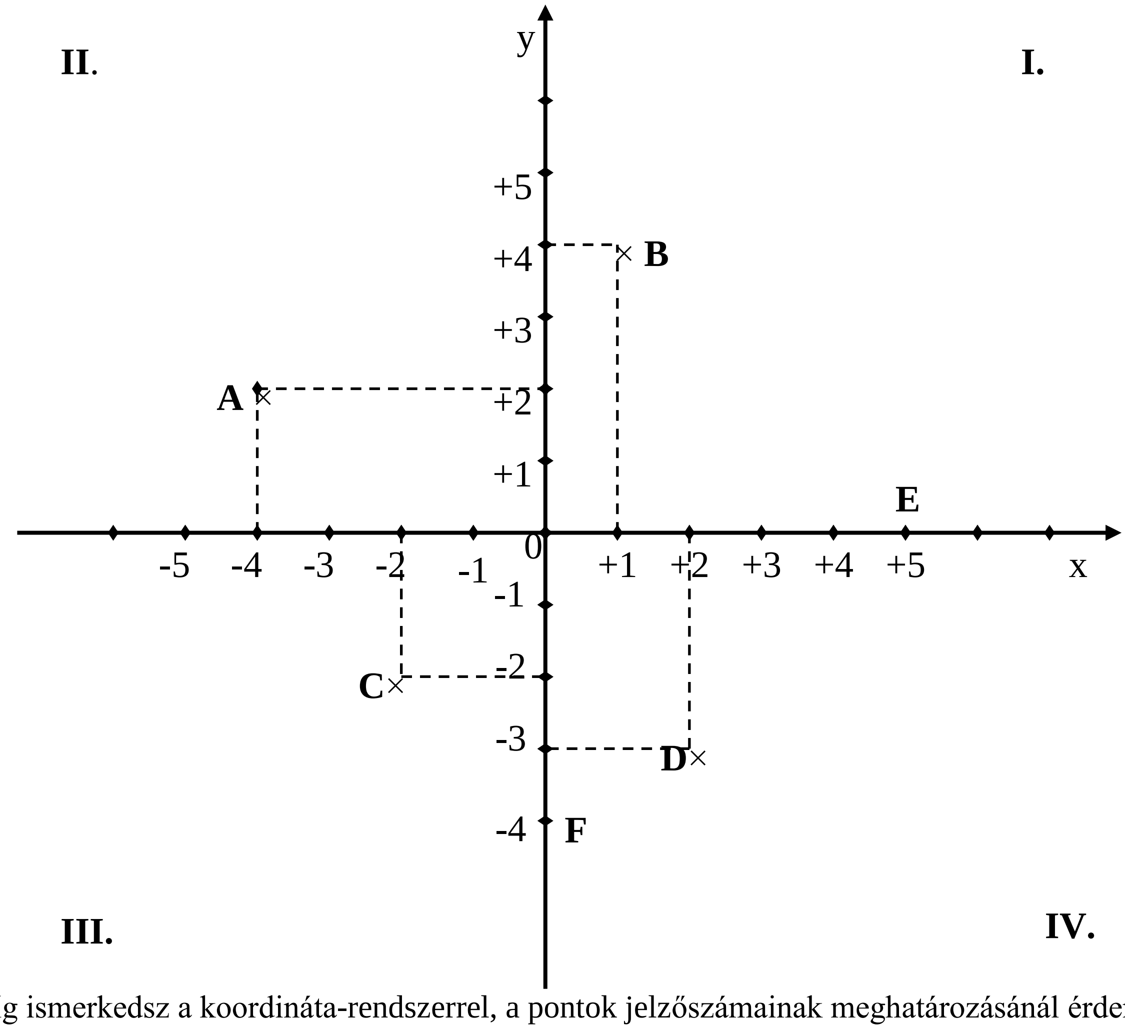
A derékszögű koordináta-rendszert két, egymásra merőleges számegyenes alkotja. Az egyeneseket **koordinátatengely**eknek, metszéspontjukat kezdőpontnak, **origó**nak nevezzük. Az origóhoz mindkét számegyenesen a 0-t rendeljük hozzá. A „vízszintes” tengely az **x** (abszcissza) tengely, a „függőleges” az **y** (ordináta) tengely.

Az x tengelyen a számok jobbra, az y tengelyen felfelé növekednek.

A koordináta-rendszer segítségével a sík bármely P pontjának a helyzete két jelzőszám (koordináta) segítségével egyértelműen meghatározható. A pont helyzetét a két tengelytől mért előjeles távolságával határozzuk meg. A pontnak a tengelyektől mért előjeles távolságai a **pont koordinátái** (jelzőszámai). Az előjelek a számegyenesek segítségével adhatók meg.

A jelzőszámokat, a pont neve után zárójelben adjuk meg: P(x;y)

A koordináta-rendszer a síkot négy síknegyedre osztja. A negyedeket római számmal jelöljük.



Amíg ismerkedsz a koordináta-rendszerrel, a pontok jelzőszámainak meghatározásánál érdemes a következőképpen eljárnod: Az origóból indulva el kell jutnunk a kiválasztott pontba úgy, hogy csak a tengelyekkel párhuzamosan haladhatunk, és az indulás után csak egyszer válthatunk irányt. Van még egy nagyon fontos szabály: először mindig az x tengellyel párhuzamosan kell elindulni.

Példa: Határozzuk meg az ábrán megjelölt pontok jelzőszámait! A lépések iránya és száma adja a koordináta előjelét és értékét.

P (x ; y)

első jelzőszám — második jelzőszám.

Indulás az origóból!!!

A pont: **1.** x-tengellyel párhuzamosan: negatív irányba (balra) 4 lépés x = -4

Innen tovább:

2. y-tengellyel párhuzamosan: pozitív irányba (fel) 2 lépés y = +2

A(-4;+2)

B pont: **1.** x-tengellyel párhuzamosan: pozitív irányba (jobbra) 1 lépés x = +1

Innen tovább:

2. y-tengellyel párhuzamosan: pozitív irányba (fel) 4 lépés y = +4

B(+1;+4)

C pont: **1.** x-tengellyel párhuzamosan: negatív irányba (balra) 2 lépés x = -2

Innen tovább:

2. y-tengellyel párhuzamosan: negatív irányba (le) 2 lépés y = -2

C(-2;-2)

D pont: **1.** x-tengellyel párhuzamosan: pozitív irányba (jobbra) 2 lépés x = +2

Innen tovább:

2. y-tengellyel párhuzamosan: negatív irányba (le) 3 lépés y = -3

D(+2;-3)

E pont: **1.** x-tengellyel párhuzamosan: pozitív irányba (jobbra) 5 lépés x = +5

Innen tovább:

2. y-tengellyel párhuzamosan: 0 lépés y = 0

E(+5;0)

F pont: **1.** x-tengellyel párhuzamosan: 0 lépés x = 0

Innen tovább:

2. y-tengellyel párhuzamosan: negatív irányba (le) 4 lépés y = -4

F(0;-4)

121. A hatványban szereplő kifejezések elnevezése, a^n fogalma.

Azonos szorzótényezők esetén a szorzat fölírható rövidebb alakban, úgynevezett hatvány alakban.

Példa: $5 * 5 * 5 * 5 * 5 = 5^4$ (Olvasd így: Öt a negyediken.)

$3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3 = 3^8$ (Olvasd így: Három a nyolcadikon.)

$7 * 7 * 7 = 7^3$ (Olvasd így: Hét a harmadikon, vagy hét a köbön.)

$6 * 6 = 6^2$ (Olvasd így: Hat a másodikon, vagy hat a négyzeten.)

A hatványban szereplő kifejezések elnevezése:

Hatványkitevő (Megadja a tényezők számát.)

$$a^n = \text{hatványérték}$$

Hatványalap (Az ismétlődő tényező.)

$$a^n = \underbrace{a * a * a * a \ldots\ldots\ldots * a}_{\text{n darab tényező (n természetes szám)}}$$

n darab tényező
(n természetes szám)

a $^{\mathbf{n}}$ olyan **n** tényezős szorzat, amelynek minden szorzótényezője **a**.

122. A hatványérték kiszámítása, a hatványozás nevezetes azonosságai.

A hatványérték kiszámítása: a hatványt felírjuk szorzatként, és elvégezzük a szorzást.

Példa: $2^5 = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 32$

$3^4 = 3 * 3 * 3 * 3 = 81$

$5^3 = 5 * 5 * 5 = 125$

Néhány nevezetes azonosság:

$$a^1 = a$$

$$1^n = 1$$

$$0^n = 0 \quad (n \neq 0)$$

$$a^0 = 1 \quad (a \neq 0)$$

Bármely 0-tól különböző szám nulladik hatványa 1.

$$0^0 = \text{nem értelmezzük}$$

$a^0 = 1$ Jogos a kérdés: Miért? Nézzünk két konkrét példát!

$2^4 = 16$	$3^4 = 81$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$2^1 = 2$	$3^1 = 3$

Vegyük észre:

ha a kitevőt eggyel csökkentjük,

a hatványérték mindig az előző **felére**	a hatványérték mindig az előző **harmadára**

változik.

Csökkentsük ismét eggyel a kitevőt, és tartsuk magunkat az előbb felismert szabályhoz!

$\mathbf{2^0} = 2 : 2 = \mathbf{1}$	$\mathbf{3^0} = 3 : 3 = \mathbf{1}$

Hasonlóan belátható bármely pozitív egész alap esetén.

Minden más esetben: pl. $(-32{,}562)^0 = 1$, pedig egyelőre higgyük el!

123. Negatív alapú hatvány értéke.

Negatív alapú hatvány értéke:

— pozitív, ha a kitevője páros. (Páros számú negatív tényező a szorzatban.)
— negatív, ha a kitevője páratlan. (Páratlan számú negatív tényező a szorzatban.)

A negatív hatványalapot mindig zárójelbe kell tenni! $(-5)^3$; $(-3)^7$

Példa: $(-3)^{25}$ = negatív, mert páratlan számú negatív tényező van a szorzatban.

$(-7)^{40}$ = pozitív, mert páros számú negatív tényező van a szorzatban.

Figyelem!!

-2^5 nem azonos a $(-2)^5$ –nel, bár az értékük egyenlő:

$\mathbf{-2^5} = -1 * 2^5 = -1 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = \mathbf{-32}$ $\mathbf{(-2)^5} = (-2) * (-2) * (-2) * (-2) * (-2) = \mathbf{-32}$

-2^4 és $(-2)^4$ –nél, (páros kitevő esetén) már számolási hibát okoz, ha összekeverjük a kettőt.

$\mathbf{-2^4} = -1 * 2^4 = -1 * 2 * 2 * 2 * 2 = \mathbf{-16}$ $\mathbf{(-2)^4} = (-2) * (-2) * (-2) * (-2) = \mathbf{16}$

124. Hatvány alakú kifejezések összeadása, kivonása.

Összeadni és kivonni, csak olyan hatvány alakú kifejezéseket tudunk, amelyeknek az alapja és a kitevője is megegyezik.

Példa:

$\mathbf{7} * 2^3 - \mathbf{4} * 2^3 = \mathbf{3} * 2^3$

$\mathbf{5} * 4^7 + \mathbf{6} * 4^7 = \mathbf{11} * 4^7$

$\mathbf{9} * 3^6 - \mathbf{5} * 3^6 = \mathbf{4} * 3^6$

$\mathbf{4} * 7^2 + 7^2 = \mathbf{5} * 7^2$

$3 * 5^6 + 2 * 3^7$ = nem összeadható hatvány alakban

$7 * 4^3 - 2 * 5^2$ = nem kivonható hatvány alakban

$5 * 3^4 + 2 * 3^7$ = nem összeadható hatvány alakban

125. Azonos alapú hatványok szorzása.

$$n, m, a, b \in N, \; b \neq 0$$

Azonos alapú hatványok szorzásakor a közös alapot a kitevők összegére emeljük.

$$\mathbf{a^n * a^m} = \underbrace{a*a*a*a*a*\ldots*a}_{n \text{ db}} + \underbrace{*\; a*a*a*\ldots*a}_{m \text{ db}} = \mathbf{a^{n+m}}$$

Példa:

$$6^3 * 6^5 = 6^8$$
$$5^4 * 5^2 = 5^6$$
$$7^2 * 7^3 * 7^2 = 7^7$$
$$3^4 * 3^2 * 3^5 = 3^{11}$$

126. Azonos kitevőjű hatványok szorzása.

Azonos kitevőjű hatványok szorzásakor az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.

$$\mathbf{a^n * b^n} = \underbrace{a*a*a*\ldots*a}_{n \text{ db}} * \underbrace{b*b*\ldots*b}_{n \text{ db}} = \underbrace{(a*b)*(a*b)*(a*b)\ldots(a*b)}_{n \text{ db}} = \mathbf{(a*b)^n}$$

Példa:

$$2^9 * 5^9 = (2*5)^9 = 10^9 = 1000000000$$
$$6^3 * 2^3 = (6*2)^3 = 12^3$$
$$5^4 * 3^4 = (5*3)^4 = 15^4$$
$$7^2 * 2^2 * 3^2 = (7*2*3)^2 = 42^2$$
$$4^5 * 2^5 * 3^5 = (4*2*3)^5 = 24^5$$

127. Szorzat hatványozása.

Szorzat hatványozása: Szorzatot úgy is hatványozhatunk, hogy a tényezőket külön-külön az adott kitevőre emeljük, majd a hatványokat összeszorozzuk. (Szorzatot tényezőnként is hatványozhatunk.)

$$\mathbf{(a*b)^n} = \underbrace{(a*b)*(a*b)*(a*b)\ldots(a*b)}_{n \text{ db}} = \underbrace{a*a*a*\ldots*a}_{n \text{ db}} * \underbrace{b*b*\ldots*b}_{n \text{ db}} = \mathbf{a^n * b^n}$$

Példa:

$$(7*5)^9 = 7^9 * 5^9$$
$$(6*2*3)^2 = 6^2 * 2^2 * 3^2$$

128. Azonos alapú hatványok osztása.

Azonos alapú hatványok osztásakor a közös alapot a kitevők különbségére emeljük.

$$\frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{a^m}} = \frac{\overbrace{\underbrace{\cancel{a*a*a*...*a}}_{m\ db}*a*a*.....*a}^{n\ db}}{\underbrace{\cancel{a*a*a*...*a}}_{m\ db}} = \overbrace{a*a*a*\ldots*a}^{n-m\ db} = \mathbf{a^{n-m}}$$

Példa:

$$\frac{\mathbf{3^5}}{\mathbf{3^3}} = \frac{\cancel{3*3*3}*3*3}{\cancel{3*3*3}} = 3^{5-3} = \mathbf{3^2}$$

$$\frac{\mathbf{7^9}}{\mathbf{7^4}} = \frac{\cancel{7*7*7*7}*7*7*7*7*7}{\cancel{7*7*7*7}} = 7^{9-4} = \mathbf{7^5}$$

$$\frac{5^{10}}{5^7} = 5^3$$

129. Azonos kitevőjű hatványok osztása.

Azonos kitevőjű hatványok osztásakor az alapok hányadosát a közös kitevőre emeljük.

$$\frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b^n}} = \frac{\overbrace{a*a*a*a*...*a}^{n\ db}}{\underbrace{b*b*b*b*...*b}_{n\ db}} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)*\left(\frac{a}{b}\right)*\left(\frac{a}{b}\right)*...*\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\ db} = \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}}$$

Példa:

$$\frac{\mathbf{6^5}}{\mathbf{3^5}} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = \mathbf{2^5} \qquad \frac{18^3}{6^3} = \left(\frac{18}{6}\right)^3 = 3^3 \qquad \frac{14^3}{5^3} = \left(\frac{14}{5}\right)^3$$

130. Tört (hányados) hatványozása.

Tört (hányados) hatványozása: Törtet (hányadost) úgy is hatványozhatunk, hogy a számlálót és a nevezőt (osztandót és osztót) is az adott kitevőre emeljük.

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}} = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right)*\left(\frac{a}{b}\right)*\left(\frac{a}{b}\right)*...*\left(\frac{a}{b}\right)}_{n\ db} = \underbrace{\frac{\overbrace{a*a*a*...*a}^{n\ db}}{b*b*b*...*b}}_{n\ db} = \frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b^n}}$$

Példa:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} \qquad (2:3)^4 = 2^4 : 3^4$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{5^3}{7^3} \qquad (5:7)^3 = 5^3 : 7^3$$

131. Hatvány hatványozása.

Hatványt úgy is hatványozhatunk, hogy az alapot a kitevők szorzatára emeljük.

$$\left(\mathbf{a^n}\right)^{\mathbf{m}} = \underbrace{a^n * a^n * a^n * \ldots * a^n}_{\text{m db}} = \underbrace{\overbrace{(a*a*\ldots*a)}^{\text{n db}} * \overbrace{(a*a*\ldots*a)}^{\text{n db}} * \ldots \overbrace{(a*a*\ldots*a)}^{\text{n db}}}_{\text{m db}} = \mathbf{a^{n*m}}$$

Példa: $\left(3^2\right)^5 = 3^{10}$ $\left(5^3\right)^2 = 5^6$ $\left(7^4\right)^3 = 7^{12}$ $\left(8^6\right)^2 = 8^{12}$

132. Negatív egész kitevőjű hatvány értéke.

Negatív egész kitevőjű hatvány értékét megkapjuk, ha az alap reciprok értékét, a kitevő ellentettjére emeljük.

$$\mathbf{a^{-n}} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}}\right)^{\mathbf{n}} \qquad \left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{-\mathbf{n}} = \left(\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\right)^{\mathbf{n}}$$

Jogos a kérdés: Miért?

Nézzük a következő két esetet!

$2^4 = 16$	$3^4 = 81$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$
$2^2 = 4$	$3^2 = 9$
$2^1 = 2$	$3^1 = 3$

Vegyük észre:

ha a kitevőt eggyel csökkentjük,

a hatványérték mindig az előző **felére**	a hatványérték mindig az előző **harmadára**

változik!

Csökkentsük ismét eggyel a kitevőt, és tartsuk magunkat az előbb felismert szabályhoz!

$\mathbf{2^0} = 2 : 2 = \mathbf{1}$	$\mathbf{3^0} = 3 : 3 = \mathbf{1}$

Ne álljunk meg! Csökkentsük ismét a kitevőt, és tartsuk magunkat továbbra is előbb már felhasznált szabályhoz!

$\mathbf{2^{-1}} = 1:2 = \frac{1}{2} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{1}}$	$\mathbf{3^{-1}} = \frac{1}{3} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{1}}$
$\mathbf{2^{-2}} = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}$	$\mathbf{3^{-2}} = \frac{1}{3} : 3 = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{2}}$
$\mathbf{2^{-3}} = \frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{3}}$	$\mathbf{3^{-3}} = \frac{1}{9} : 3 = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\right)^{\mathbf{3}}$

Hasonlóan belátható bármely pozitív egész alap esetén.

133. A számok normálalakja.

A **normálalak** olyan kéttényezős szorzat, amelyben az első tényező abszolút értéke nem kisebb, mint 1, de 10-nél kisebb; a második tényező, pedig 10-nek egész kitevős hatványa.

A nulla kivételével minden szám egyértelműen felírható normálalakban.

A normál alakban írt szám értéke nem változik, csak az alakja.

A ***10-zel, 100-zal, 1000-rel****,… stb. való* ***osztás****, az* $\frac{1}{10} = \mathbf{10^{-1}}$*-nel,* $\frac{1}{100} = \mathbf{10^{-2}}$*-nal,* $\frac{1}{1000} = \mathbf{10^{-3}}$*-nal…stb. való* ***szorzással*** *azonos.*

Pl.:

$$\mathbf{548{,}7 : 10} = 548{,}7 * \frac{1}{10} = \mathbf{548{,}7 * 10^{-1}} = 54{,}87$$

$$3725 : 100 = 3725 : 10^{2} = 3725 * \frac{1}{100} = 3725 * 10^{-2} = 37{,}25$$

$$273600 : 1000 = 273600 : 10^{3} = 273600 * \frac{1}{1000} = 273600 * 10^{-3} = 273{,}6$$

Az $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{1000}$; 10; 100; 1000… egész kitevős hatvány alakjával 10^{-1}-nel; 10^{-2} -nal, 10^{-3}-nal, 10-zel, 10^{2}-nal, 10^{3}-nal… való **szorzásnál** a kitevő mutatja meg, hogy a tizedesvesszőt hány helyi értékkel kell elmozdítanunk, a kitevő előjele, pedig az elmozdulás irányát adja meg.

Pozitív kitevő esetén jobbra, negatív kitevő esetén balra visszük a tizedesvesszőt.

Példa:

$$3749{,}35 * 10^{-3} = 3{,}74935$$

$$0{,}2651 * 10^{2} = 26{,}51$$

$$8261{,}3 * 10^{-2} = 82{,}613$$

$$725000 * 10^{-5} = 7{,}25$$

$$27820 * 10^{-4} = 2{,}782$$

134. Szám fölírása normálalakban

Szám fölírása normálalakban:

1. LÉPÉS: A tizedes vesszőt mozgassuk el úgy, hogy a kapott szám abszolút értéke 1 és 10 közé essen! *(A szám értéke megváltozik!!)*

2. LÉPÉS: Az imént kapott számot szorozzuk meg 10-nek azzal az egész kitevős hatványával, amely a szorzás elvégzése után a tizedesvesszőt visszajuttatná az eredeti helyére!

(Ezzel a lépéssel) állítjuk vissza a szám eredeti értékét)

Példa: **1.**

54823 normálalakja = ?

1. LÉPÉS:

$1 \leq 5{,}4823 < 10$

Négy helyi értékkel balra vittük a tizedesvesszőt.

2. LÉPÉS

10^4-nel való szorzás a vesszőt 4 helyi értékkel jobbra mozgatja, azaz pontosan az vissza az eredeti helyére.

$5{,}4823 * 10^4$

2.

0,0000274 normálalakja = ?

1. LÉPÉS:

$1 \leq 2{,}74 < 10$

Öt helyi értékkel jobbra vittük a tizedesvesszőt.

2. LÉPÉS

10^{-5}-nel való szorzás a vesszőt 5 helyi értékkel balra mozgatja, azaz pontosan az vissza az eredeti helyére.

$2{,}74 * 10^{-5}$

3.

-834000000000000000 normálalakja = ?

1. LÉPÉS:

$1 \leq |-8{,}34| < 10$

17 helyi értékkel balra vittük a tizedesvesszőt.

2. LÉPÉS

10^{17}-nel való szorzás a vesszőt 17 helyi értékkel jobbra mozgatja, azaz pontosan az vissza az eredeti helyére.

$-8{,}34 * 10^{17}$

4. $0{,}00000000186 = 1{,}86 * 10^{-9}$

5. $82600000 = 8{,}26 * 10^{7}$

6. $0{,}00009453 = 9{,}453 * 10^{-5}$

7. $636800000 = 6{,}368 * 10^{8}$

135. Az oszthatóság fogalma. (2-féle) Az oszthatóság fogalmát a természetes számok halmazán értelmezzük.

1. Egy **a** szám osztható egy **b** számmal, (**a** és **b** természetes számok) ha a **b** szám egészszer és maradék nélkül megvan az **a** számban. Ekkor a **b** szám osztója az **a** számnak, az **a** szám pedig többszöröse a **b** számnak.

Példa: **a.**

12 osztható 3-mal, mert

12 : 3 = 4
0

A 3 osztója a 12-nek, és a 12 többszöröse a 3-nak.

b.

28 osztható 4-gyel, mert

28 : 4 = 7
0

A 4 osztója a 28-nak, és a 28 többszöröse a 4-nek.

2. Egy **a** szám osztható egy **b** számmal, (**a** és **b** természetes számok, és **b** $\neq$ 0) ha a

$$\mathbf{b * x = a}$$

egyenlet megoldható a természetes számok halmazán.

Vagyis, ha az

$$\mathbf{x = \frac{a}{b}}$$

természetes szám.

Példa: **a.** 12 osztható 3-mal, mert

$$\mathbf{3 * x = 12}$$

egyenlet megoldása:

$$\mathbf{x = 4}$$

természetes szám.

A 3 osztója a 12-nek, és a 12 többszöröse a 3-nak

b. 28 osztható 4-gyel, mert

$$\mathbf{4 * x = 28}$$

egyenlet megoldása:

$$\mathbf{x = 7}$$

természetes szám.

A 4 osztója a 28-nak, és a 28 többszöröse a 4-nek.

A 0 egyetlen számnak sem osztója. (A 0-val való osztás értelmetlen.)
A 0 minden számnak többszöröse. (A 0-ban minden szám megvan maradék nélkül, 0-szor.)

136. Nem valódi osztó, valódi osztó

Nem valódi osztó: Egy szám nem valódi osztói az 1 és maga a szám.
Valódi osztó: A szám minden osztója, a nem valódi osztók kivételével.

Példa: **a.** 12 nem valódi osztói: 1; 12
12 valódi osztói: 2; 3; 4; 6

b. 45 nem valódi osztói: 1; 45
45 valódi osztói: 3; 15; 5; 9

137. Prímszám fogalma, összetett szám fogalma.

Prímszám (törzsszám): Olyan szám, amelynek pontosan kettő darab osztója van: 1 és önmaga.
A prímszámnak nincs valódi osztója.
Összetett szám: Olyan szám, amelynek kettőnél több osztója van.
Végtelen sok prímszám van.
Végtelen sok összetett szám van.
Az 1 nem prímszám, és nem is összetett szám, hiszen csak egy darab osztója van.
Az 0 nem prímszám, és nem is összetett szám, nem osztója önmagának.
A 2 az egyetlen páros prímszám.

Példa: Prímszámok: 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; ….

Összetett számok: 4; 6; 8; 10; 12; 14; 15; …21;…27…

138. A számelmélet alaptétele:

Minden összetett szám - a sorrendtől eltekintve – egyértelműen fölírható prímszámok szorzataként. (Ez a szám prímtényezős alakja.)

$385 = 5 * 7 * 11$
$54 = 2 * 3 * 3 * 3 = \mathbf{2 * 3^3}$ ← prímhatványtényezős alak

Példa: **1.** Határozzuk meg 630 prímtényezős alakját a következőképpen!

630	

A függőleges vonal jobb oldalára mindig egy olyan prímszám kerül, ami osztója a baloldalon lévő számnak. Az osztás elvégzése után a hányados a baloldalon lévő szám alá kerül. A következő lépésben ez lesz az osztandó. Az eljárást addig folytatjuk, amíg a baloldalon 1-et kapunk. Ekkor a jobb oldali számok szorzata a szám prímtényezős alakja.

630	2
315	5
63	7
9	3
3	3
1	

$630 = 2 * 3 * 3 * 5 * 7 = 2 * 3^2 * 5 * 7$

A prímtényezőket hagyományosan nem csökkenő sorrendben szokás írni.

2. Határozzuk meg 144 prímtényezős alakját!

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$144 = 2 * 2 * 2 * 2 * 3 *3 * 3 = \ 2^4 * 3^3$

139. Összeg oszthatósága.

Összeg oszthatósága: Összegről az összeadás elvégzése nélkül is eldönthető, hogy osztható-e egy számmal. Összeg akkor osztható egy számmal, ha a tagonként meghatározott maradékok összege osztható a számmal.

Példa: **a.** A 18 + 35 + 73 összeg osztható-e 7-tel?

Osszunk el minden tagot 7-tel maradékosan, és a 7-es maradékot írjuk a tag fölé!

4 0 3
18 + 35 + 73 Nézzük a maradékok összegét!

4 + 0 + 3 = 7

A maradékok összege osztható 7-tel, akkor az összeg is osztható 7-tel.

18+35+73= 126 *126 : 7 = 18, és a maradék 0.*

b. A 34 + 45 + 93 + 2 összeg osztható-e 9-cel?

Osszunk el minden tagot 9-cel maradékosan, és a 9-es maradékot írjuk a tag fölé!

7 0 3 2
34 + 45 + 93 + 2 Nézzük a maradékok összegét!

7 + 0 + 3 + 2 = 12

A maradékok összege nem osztható 9-cel, 9-cel osztva 3 maradékot ad.
Így az összeg sem osztható 9-cel.
A 34 + 45 + 93 + 2 összeg 9-cel osztva 3 maradékot ad

34 + 45 + 93 + 2 = 174 *174 : 9 = 19, és a maradék 3.*

140. Szorzat oszthatósága

Szorzat oszthatósága: Szorzatról a szorzás elvégzése nélkül is eldönthető, hogy osztható-e egy számmal. Szorzat akkor osztható egy számmal, ha felírható olyan alakban, hogy a szorzótényezők között szerepel a szám.

Példa: **a.** 28 * 55 * 24 szorzat osztható-e 420-zel?

Írjuk fel minden szorzótényező és az osztó prímtényezős alakját!

420 = 2 * 2 * 3 * 5 * 7

ezeket a tényezőket kell megtalálnunk a szorzatban, hogy osztható legyen 420-szal.

28 * 55 * 24 = (2 * 2 * 7) * (5 * 11) * (2 * 2 * 2 * 3) = (2 * 2 * 3 * 5 * 7) * 2 * 2 * 2 * 11 =

= 420 * 2 * 2 * 2 * 11

A szorzat osztható 420-szal.

b. 28 * 55 * 24 szorzat osztható-e 175-tel?

Írjuk fel minden szorzótényező és az osztó prímtényezős alakját!

175 = 5 * 5 * 7

ezeket a tényezőket kell megtalálnunk a szorzatban, hogy osztható legyen 175-tel.

28 * 55 * 24 = (2 * 2 * 7) * (5 * 11) * (2 * 2 * 2 * 3)

A szorzatban az 5 csak egyszer fordul elő, míg a 175 prímtényezős alakjában kétszer. Tehát egy darab 5-ösünk hiányzik, vagyis a szorzat nem írható fel olyan alakban, hogy a tényezők között szerepel a 175. A szorzat nem osztható 175-tel.

141. Oszthatósági szabályok: 2, 5, 10.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 2-vel, ha az utolsó számjegye: 0; 2; 4; 6; 8.

A 2-vel osztható számok a páros számok, a 2-vel nem osztható számok a páratlan számok.

Példa:	476385**4**	osztható 2-vel
	6483762**5**	nem osztható 2-vel
	3627583**6**	osztható 2-vel
	73500163**7**	nem osztható 2-vel

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 5-tel, ha az utolsó számjegye 0 vagy 5.

Példa:	476385**0**	osztható 5-tel
	6483762**5**	osztható 5-tel
	3627583**6**	nem osztható 5-tel
	73500163**7**	nem osztható 5-tel

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 10-zel, ha az utolsó számjegye 0.

142. Oszthatósági szabályok: 3, 9.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 3-mal, ha számjegyeinek összege osztható 3-mal.

Példa:

57432012 osztható 3-mal, mert számjegyeinek összege: 5+7+4+3+2+0+1+2 = **24** osztható 3-mal.

4583630 nem osztható 3-mal, mert számjegyeinek összege: 4+5+8+3+6+3+0 = **29** nem osztható 3-mal. A szám 3-mas maradéka 2, mert 29 hárommal osztva 2-t ad maradékul.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel.

Példa

103524111 osztható 9-cel, mert számjegyeinek összege: 1+0+3+5+2+4+1+1+1 = **18** osztható 9-cel.

4070100169 nem osztható 9-cel, mert számjegyeinek összege: 4+0+7+0+1+0+0+1+6+9 = **28** nem osztható 9-cel. A szám 9-es maradéka 1, mert 28 kilenccel osztva 1-t ad maradékul.

143. Oszthatósági szabályok: 4, 8, 25, 125.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 4-gyel, ha két utolsó számjegyéből álló szám osztható 4-gyel.

Példa:

57432012 osztható 4-gyel, mert utolsó két számjegyéből álló szám, a 12 osztható 4-gyel.

4583630 nem osztható 4-gyel, mert utolsó két számjegyéből álló szám, a 30 nem osztható 4-gyel.A szám 4-es maradéka 2, mert 30 néggyel osztva 2-t ad maradékul.

599782036 osztható 4-gyel, mert utolsó két számjegyéből álló szám, a 36 osztható 4-gyel.

245808343 nem osztható 4-gyel, mert utolsó két számjegyéből álló szám, a 43 nem osztható 4-gyel.A szám 4-es maradéka 3, mert 43 néggyel osztva 3-t ad maradékul.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 8-cal, ha három utolsó számjegyéből álló szám osztható 8-cal.

Példa:

57432032 osztható 8-cal, mert utolsó három számjegyéből álló szám, a 32 osztható 8-cal.

45839403 nem osztható 8-cal, mert utolsó három számjegyéből álló szám, a 403 nem osztható 8-cal. A szám 8-as maradéka 3, mert 403 a 8-cal osztva 3-at ad maradékul.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 25-tel, ha két utolsó számjegyéből álló szám osztható 25-tel.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 125-tel, ha három utolsó számjegyéből álló szám osztható 125-tel.

144. Oszthatósági szabályok: 11.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 11-gyel, ha számjegyeit váltakozó előjellel összeadva, a kapott összeg abszolút értéke osztható 11-gyel.

Példa:

432036 osztható 11-gyel, mert (+4) + (-3) + (+2) + (-0) + (+3) + (-6) = 0 abszolút értéke osztható 1-gyel.

90207040 osztható 11-gyel, mert (-9) + (+0) + (-2) + (+0) + (-7) + (+0) + (-4) + (+0) = -22 abszolút értéke osztható 11-gyel.

4970093 nem osztható 11-gyel, mert (+4) + (-9) + (+7) + (-0) + (+0) + (-9) + (+3) = -4 abszolút értéke nem osztható 11-gyel.

(A nulla előtti előjelnek csak az a szerepe, hogy figyelemmel lehessen követni az előjelek váltakozását.)

145.Oszthatósági szabályok: 6, 12, 15, 18.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal is.

Példa:

278035410 osztható 6-tal, mert osztható 2-vel, mert páros szám, és osztható 3-mal is mert számjegyeinek összege 30 és ez osztható 3-mal.

3030906051 nem osztható 6-tal, mert osztható ugyan 3-mal, mert számjegyeinek összege 27 és ez osztható 3-mal, de nem osztható 2-vel, mert páratlan szám.

30000752 nem osztható 6-tal, mert osztható ugyan 2-vel, mert páros szám, de nem osztható 3-mal, mert számjegyeinek összege 17 és ez nem osztható 3-mal.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 12-vel, ha osztható 3-mal és 4-gyel is.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 15-tel, ha osztható 3-mal és 5-tel is.

Egy tízes számrendszerbeli szám akkor osztható 18-cal, ha osztható 2-vel és 9-cel is.

146. Az osztók számának meghatározása

Egy szám osztóinak számát megkapjuk, ha prímhatványtényezős alakjának kitevőit 1-gyel megnövelve összeszorozzuk.

Példa 1.

Határozzuk meg 60 osztóinak a számát!

Írjuk fel a prímhatványtényezős alakját!

$60 = 2^2 * 3 * 5 = 2^{\mathbf{2}} * 3^{\mathbf{1}} * 5^{\mathbf{1}}$

A kitevők: 2; 1; 1

Növeljük mindegyiket 1-gyel, majd a kapott összegeknek vegyük a szorzatát!

$(\mathbf{2} + 1) * (\mathbf{1} + 1) * (\mathbf{1} + 1) = 3 * 2 * 2 = 12$

A 60-nak 12 darab osztója van.

2.

Határozzuk meg 756 osztóinak a számát!

Írjuk fel a prímhatványtényezős alakját!

$756 = 2^2 * 3^3 * 7 = 2^{\mathbf{2}} * 3^{\mathbf{3}} * 7^{\mathbf{1}}$

A kitevők: 2; 3; 1

Növeljük mindegyiket 1-gyel, majd a kapott összegeknek vegyük a szorzatát!

$(\mathbf{2} + 1) * (\mathbf{3} + 1) * (\mathbf{1} + 1) = 3 * 4 * 2 = 24$

A 756-nak 24 darab osztója van.

3.

Határozzuk meg 49 osztóinak a számát!

Írjuk fel a prímhatványtényezős alakját!

$49 = 7 * 7 = 7^{\mathbf{2}}$

A kitevő: 2

Növeljük 1-gyel!

$(\mathbf{2} + 1) = 3$

A 49-nek 3 darab osztója van.

147. Négyzetszám fogalma, jellemzőik.

Négyzetszámok:

Olyan természetes számok, amelyek felírhatók $\mathbf{a}^2$ alakban, ahol **a** egész szám.
(A négyzetszámok felírhatók két azonos egész szám szorzataként.)

Példa: $1 = 1^2$ $4 = 2^2$ $9 = 3^2$ $16 = 4^2$ $25 = 5^2$ $36 = 6^2$

Egy szám akkor, és csak akkor négyzetszám, ha páratlan számú osztója van.
A négyzetszámok prímhatványtényezős alakjában minden kitevő páros szám.

148. Osztók megkeresése osztópáros módszerrel.

Egy szám osztói közül azokat a párokat, amelyek szorzata egyenlő a számmal, szokás „osztópárnak” nevezni. Az 1 és a 12, a 2 és a 6, a 3 és a 4 a **12** esetében osztópárok, mert
1 * 12= 12; 2 * 6 = 12; 3 * 4 = 12.

Az osztópáros módszer lényege, hogy 1-től kezdve vizsgáljuk a számokat, és ha találunk osztót, akkor mindjárt az osztópárját is leírjuk.

Példa: Keressük meg 54 osztóit!

54 osztói:**1**; 2; *3*; *4*; 6; **12**

Az osztópáros módszernél az osztókat a legnagyobb olyan természetes számig keressük, amelynek négyzete nem nagyobb, mint a vizsgált szám.

Példa: Ha a 895 osztóit keressük, akkor a keresést 29-ig folytatjuk, mert a 29 a legnagyobb természetes szám amelyre igaz, hogy a négyzete nem nagyobb, mint 895.

$29^2 = 841 < 895$ $30^2 = 900 > 895$

Ha a 2501 osztóit keressük, akkor a keresést 50-ig folytatjuk, mert az 50 a legnagyobb természetes szám amelyre igaz, hogy a négyzete nem nagyobb, mint 2501.

$50^2 = 2500 < 2501$ $51^2 = 2601 > 2500$

Példa: Keressük meg 120 osztóit! A keresést 1-től 10-ig folytatjuk, mert a 10 a legnagyobb természetes szám amelyre igaz, hogy a négyzete nem nagyobb, mint 120.

120 osztói: **1**; 2; *3*; 4; 5; ***6***; 8; 10; 12; 15; ***20***; 24; 30; *40*; 60; **120**

Az azonos betűtípusok jelzik az osztópárokat.

149. Osztók megkeresése prímhatványtényezős alak segítségével.

Példa: **1.**

Keressük meg 54 osztóit!

1. lépés: Írjuk fel 54 prímtényezős alakját!

$$54 = 2 * 3 * 3 * 3 = 2 * 3^3$$

2. lépés: Határozzuk meg az osztóinak a számát!

$$(1 + 1) * (3 + 1) = 8$$

3. lépés: Alkalmazzuk a prímtényezős alakra a szorzat oszthatóságáról tanultakat. *(Szorzat akkor osztható egy számmal, ha felírható olyan alakban, hogy a szorzótényezők között szerepel a szám.)* Nézzük, milyen osztókat tudunk előállítani ezekből a tényezőkből! Csoportosítsuk az osztókat aszerint, hogy hány prímszám szorzataként írhatók fel.
Például a 9 a két tényezős osztók csoportjába tartozik, mert olyan osztója az 54-nek, amely két prímszám szorzataként írható fel:
9 = 3 * 3.

Nulltényezős osztók:	**1** (Az 1 nem írható fel prímszámok szorzataként, tehát nulla darab prímszám szorzatának tekintjük.)
Egy tényezős osztók:	**2**; **3**
Két tényezős osztók:	(2*3) = **6**; (3*3) = **9**
Három tényezős osztók:	(2*3*3) = **18**; (3*3*3) = **27**
Négy tényezős osztók:	(2*3*3*3) = **54**

Öt tényezős osztót nem érdemes keresnünk, hiszen az 54 prímtényezős alakja 4 tényezőből áll.

Számoljuk össze az osztókat, hogy mindet megtaláltuk-e. Ahogy még az elején kiszámoltuk, nyolc darab osztónak kell lenni.

Példa:

2.

Keressük meg 120 osztóit!

1. lépés: Írjuk fel 120 prímtényezős alakját!

$$120 = 2 * 2 * 2 * 3 * 5 = 2^3 * 3 * 5$$

2. lépés: Határozzuk meg az osztóinak a számát!

$$(3 + 1) * (1 + 1) * (1 + 1) = 16$$

3. lépés: Alkalmazzuk a prímtényezős alakra a szorzat oszthatóságáról tanultakat.
(Szorzat akkor osztható egy számmal, ha felírható olyan alakban, hogy a szorzótényezők között szerepel a szám.)
Nézzük, milyen osztókat tudunk előállítani ezekből a tényezőkből!
Csoportosítsuk az osztókat aszerint, hogy hány prímszám szorzataként írhatók fel.
Például a 15 a két tényezős osztók csoportjába tartozik, mert olyan osztója a 120-nak, amely két prímszám szorzataként írható fel: 15 = 3 * 5.

Nulltényezős osztók:	**1** (Az 1 nem írható fel prímszámok szorzataként, tehát nulla darab prímszám szorzatának tekintjük.)
Egy tényezős osztók:	**2**; **3**; **5**
Két tényezős osztók:	(2*2) = **4**; (2*3) = **6**; (2*5) = **10**; (3*5) = **15**
Három tényezős osztók:	(2*2*2) = **8**; (2*2*3) = **12**; (2*2*5) = **20**; (2*3*5) = **30**
Négy tényezős osztók:	(2*2*2*3) = **24;** (2*2*2*5) = **40;** (2*2*3*5) = **60;**
Öt tényezős osztók:	(2*2*2*3 *5) = **120**

Hat tényezős osztót nem érdemes keresnünk, hiszen a 120 prímtényezős alakja 5 tényezőből áll.
Számoljuk össze az osztókat, hogy mindet megtaláltuk-e! Ahogy még az elején kiszámoltuk, tizenhat darab osztónak kell lenni.

150. Közös osztó, legnagyobb közös osztó fogalma, jele.

Közös osztó:
Két, vagy több szám közös osztói azok a számok, amelyek az adott számok mindegyikének osztói.

Példa: **1.**

Keressük meg a126 és a 210 közös osztóit osztópáros módszerrel!

126 osztói: **1**; **2**; **3**; **6**; **7**; 9; **14**; 18; **21**; **42**; 63; 126

210 osztói: **1**; **2**; **3**; 5; **6**; **7**; 10; **14**; 15; **21**; 30; 35; **42**; 70; 105; 210

Mindkét számnak osztói az **1**; **2**; **3; 6**; **7; 14; 21** és a **42** ezért

126 és 210 közös osztói: **1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42.**

Legnagyobb közös osztó:
Két vagy több szám közös osztói közül a legnagyobbat a számok legnagyobb közös osztójának nevezzük.
Jelölése: (a; b) =
Olvasd így! Az a és b számok legnagyobb közös osztója.
A legnagyobb közös osztó többszöröse az összes közös osztónak.

Legnagyobb közös osztó meghatározása az osztópáros módszer segítségével:

Példa: **1.** Keressük meg a 126 és a 210 legnagyobb közös osztóját!

(126; 210) = ?

126 osztói: **1**; **2**; **3**; **6**; **7**; 9; **14**; 18; **21**; **42**; 63; 126

210 osztói: **1**; **2**; **3**; 5; **6**; **7**; 10; **14**; 15; **21**; 30; 35; **42**; 70; 105; 210

126 és 210 közös osztói: **1**; **2**; **3**; **6; 7; 14; 21; 42**.

A közös osztók közül a legnagyobb: 42.

(126; 210) = 42

2. Keressük meg a 126; 140 és a 210 legnagyobb közös osztóját!

(126; 140; 210) = ?

126 osztói: **1**; **2**; 3; 6; **7**; 9; **14**; 18; 21; 42; 63; 126

140 osztói: **1**; **2**; 4; 5; **7**; 10; **14**; 20; 28; 35; 70; 140

210 osztói: **1**; **2**; 3; 5; 6; **7**; 10; **14**; 15; 21; 30; 35; 42; 70; 105; 210

126; 140 és 210 közös osztói: **1**; **2**; **7, 14**

A közös osztók közül a legnagyobb: **14**

(126; 140; 210) = 14

151. Legnagyobb közös osztó megkeresése prímtényezős felbontás segítségével.

Két, vagy több szám legnagyobb közös osztóját úgy is megkaphatjuk, hogy a prímhatványtényezős alakjukban szereplő közös prímtényezőket az előforduló legkisebb hatványkitevővel véve összeszorozzuk.

Példa: **1.** Keressük meg a 630 és a 756 legnagyobb közös osztóját!

$$(630; 756) = ?$$

$$630 = 2 * 3 * 3 * 5 * 7$$

$$756 = 2 * 2 * 3 * 3 * 3 * 7$$

Használjuk a prímhatványtényezős alakot!

$$630 = \mathbf{2} * \mathbf{3}^2 * 5 * \mathbf{7}$$

$$756 = \mathbf{2}^2 * \mathbf{3}^3 * \mathbf{7}$$

A közös prímtényezők a 2; 3 és a 7. Keressük meg ezek legkisebb kitevős előfordulását, és vegyük ezek szorzatát!

$$630 = \mathbf{2} * \mathbf{3^2} * 5 * \mathbf{7}$$

$$756 = 2^2 * 3^3 * 7$$

$$\underline{(630; 756) = \mathbf{2 * 3^2 * 7 = 126}}$$

2. Keressük meg a 405; 630 és a 756 legnagyobb közös osztóját!

$$(405; 630; 756) = ?$$

$$405 = 3 * 3 * 3 * 3 * 5$$

$$630 = 2 * 3 * 3 * 5 * 7$$

$$756 = 2 * 2 * 3 * 3 * 3 * 7$$

Használjuk a prímhatványtényezős alakot!

$$405 = \mathbf{3}^4 * 5$$

$$630 = 2 * \mathbf{3}^2 * 5 * 7$$

$$756 = 2^2 * \mathbf{3}^3 * 7$$

A közös prímtényező a 3. Keressük meg a legkisebb kitevős előfordulását.

$$405 = 3^4 * 5$$

$$630 = 2 * \mathbf{3^2} * 5 * 7$$

$$756 = 2^2 * 3^3 * 7$$

$$\underline{(405; 630; 756) = \mathbf{3^2 = 9}}$$

152. Relatív prímszám.

Példa: **1.** Keressük meg a 14 és 27 legnagyobb közös osztóját!

(14; 27) =

14 osztói : 1; 2; 7; 14

27 osztói: 1; 3; 9; 27

(14; 27) = 1

Keressük meg a 14, 25 és 27 legnagyobb közös osztóját!

(14; 25; 27) =

14 osztói : 1; 2; 7; 14

25 osztói: 1; 5; 25

27 osztói: 1; 3; 9; 27

(14; 25; 27) = 1

Relatív prímszámok:
Azokat a számokat, amelyek legnagyobb közös osztója 1, relatív prímszámoknak *(relatív prímeknek)* nevezzük. Két szomszédos pozitív egész szám mindig relatív prím.

153. Többszörös, közös többszörös, legkisebb közös többszörös fogalma, jele.

Többszörös: Egy szám többszörösét kapjuk, ha megszorozzuk egy természetes számmal. Minden számnak végtelen sok többszöröse van.

Példa: Nézzük a 7 néhány többszörösét!

7 * 0 = **0**
7 * 1 = **7**
7 * 2 = **14**
7 * 3 = **21**
7 * 4 = **28**
7 * 5 = **35**

Közös többszörös: Két, vagy több szám közös többszörösei azok a számok, amelyek az adott számok mindegyikének többszörösei. Bármely két, vagy több számnak végtelen sok közös többszöröse van.

Példa: Keressük meg a 8 és a 20 néhány közös többszörösét!

8 többszörösei: 0; 8; 16; 24; 32; **40**; 48; 56; 64; 72; **80**; 88; 96; 104; 112; **120**; 128…

20 többszörösei: 0; 20; **40**; 60; **80**; 100; **120**; 140 …

Legkisebb közös többszörös: Két vagy több szám pozitív közös többszörösei közül a legkisebbet a számok legkisebb közös többszörösének nevezzük. A legkisebb közös többszörös osztója minden közös többszörösnek.
.Jelölése: [a; b] =
Olvasd így! Az a és b számok legkisebb közös többszöröse.

154. Legkisebb közös többszörös megkeresése prímtényezős felbontás segítségével.

Példa: Keressük meg a 8 a 20 és a 27 legkisebb közös többszörösét!

8 többszörösei: 8; 16; 24; 32; 40; 48; 56; 64; 72; 80; 88; 96; 104; 112; 120; 128…

20 többszörösei: 20; 40; 60; 80; 100; 120; 140; 160; 180; 200; 220; 240; 260; 280; …

27 többszörösei: 27; 54; 81; 108; 135; 162; 189; 216; 243; 270; 297; 324; 351…

Előbb utóbb megtalálnánk a legkisebb közös többszöröst, mert ez célravezető módszer, csak időnként – mint most is – nagyon nehézkes.

Helyette:

Hívjuk segítségül a prímtényezős alakot.

$$8 = 2 * 2 * 2$$
$$20 = 2 * 2 * 5$$
$$27 = 3 * 3 * 3$$

$$[8; 20; 27] = ?$$

A szám pozitív többszörösét úgy kapjuk, hogy az adott számot megszorozzuk egy pozitív egész számmal. A szám az eredeti prímtényezőit a többszöröseiben is megtartja. (A pozitív számmal történő szorzás egyetlen meglévő prímtényezőt sem tüntet el.) A nyolcnak minden többszörösében lesz legalább három darab 2-tes prímtényező. A legkisebb közös többszörösben is. Tehát

$$[8; 20; 27] = 2 * 2 * 2 \ldots..$$

Ahhoz, hogy ez a szám a 20-nak is többszöröse legyen, tartalmaznia kell két 2-es és egy 5-ös prímtényezőt.
A 2-esekkel nincs gond, de az 5 még hiányzik.
Pótoljuk!

$$[8; 20; 27] = 2 * 2 * 2 * 5\ldots..$$

Ez a szorzat a 8-nak és a 20-nak már közös többszöröse. Ahhoz azonban, hogy a 27-nek is többszöröse lehessen, három darab 3-as prímtényezőt is tartalmaznia kell.

$$[8; 20; 27] = 2 * 2 * 2 * 3 * 3 * 3 * 5 = 2^3 * 3^3 * 5 = 1080$$

Ha a prímtényezők közül akár egyet is elhagynánk, akkor az a szorzat már nem lenne többszöröse valamelyik számnak a három közül. Így ez valóban a legkisebb közös többszörös.

Legkisebb közös többszörös megkeresése:
Két, vagy több szám legkisebb közös többszörösét úgy is megkaphatjuk, ha az összes prímtényezőt, az előforduló legnagyobb hatványkitevőn összeszorozzuk.

Példa: **1.** $[8; 20; 27] =$

Írjuk fel a számok prímhatványtényezős alakját!

$8 = 2^3$ $20 = 2^2 * 5$ $27 = 3^3$

Keressük meg minden prímtényezőnek a legnagyobb kitevős alakját, és vegyük ezek szorzatát!

$8 = \mathbf{2^3}$ $20 = 2^2 * \mathbf{5}$ $27 = \mathbf{3^3}$

$$[8; 20; 27] = \mathbf{2^3 * 3^3 * 5 = 1080}$$

2. **[336; 441; 800] =**

Írjuk fel a számok prímhatványtényezős alakját!

$336 = 2^4 * 3 * 7$ $\qquad$ $441 = 3^2 * 7^2$ $\qquad$ $800 = 2^5 * 5^2$

Keressük meg minden prímtényezőnek a legnagyobb kitevős alakját, és vegyük ezek szorzatát!

$$336 = 2^4 * 3 * 7$$

$$441 = \mathbf{3^2} * \mathbf{7^2}$$

$$800 = \mathbf{2^5} * \mathbf{5^2}$$

$$\mathbf{[336; 441; 800] = 2^5 * 3^2 * 5^2 * 7^2 = 352800}$$

155. Algebrai kifejezés fogalma

Algebrai kifejezés: Ha betűkre és számokra a négy alapműveletet és a gyökvonást véges sokszor alkalmazzuk, algebrai kifejezést kapunk.

Példa:

$5a + 3b$; $\qquad$ $2{,}64d^2$; $\qquad$ $15c – 3d^5 + 3c^3$; $\qquad$ $abc + 3bd - 5c^4d^6$; $\qquad$ $\dfrac{3a^4b^2}{7c^2d^5}$

Az algebrai kifejezésekben az egymás mellé írt szám és betű, valamint két betű közé szorzásjelet kell képzelni!
*Pl.: 5ab + 3cd = 5*a*b + 3*c*d*

156. Egytagú algebrai kifejezés, az egytagú algebrai kifejezés részei.

Egytagú algebrai kifejezés: Olyan algebrai kifejezés, amelyben nincs összeadás, kivonás.

Példa:

$3a^3b^4$; $\qquad$ $4{,}67bc$; $\qquad$ $\dfrac{3b}{7}$; $\qquad$ $\dfrac{6b^3c}{7d}$

Az egytagú algebrai kifejezés részei:

$$5ab^3$$

együttható → *A változó számszorzója. Az 1 együtthatót nem írjuk ki.*

változó → *Mindig betű.*

157. Többtagú algebrai kifejezés

Többtagú algebrai kifejezés: Olyan algebrai kifejezés, amelyben van összeadás, kivonás. Többtagú algebrai kifejezést kapunk az egytagúak összeadásával, kivonásával

Példa:

$7a + 3a^3b^4$; $\qquad$ $4{,}67b - 3c + 5d$; $\qquad$ $2\dfrac{b}{c} + 7a$;

158. Egynemű algebrai kifejezés, különnemű algebrai kifejezés

Egynemű algebrai kifejezés: Két egytagú algebrai kifejezés egynemű, ha legfeljebb együtthatóikban különböznek.
Különnemű algebrai kifejezés: Két egytagú algebrai kifejezés különnemű, ha változóikban, illetve azok hatványaiban különböznek.

Példa: Egyneműek: $3a^2b$; $-7a^2b$; $4{,}7a^2b$; $\frac{3}{7}a^2b$

Különneműek: $3a^2b$; $3ab$; $5ab^2$; $-2{,}9a^2b^3$

Különneműek: $5bc^5$ $3xyz$ $-4d^3f$ $\frac{3bc^5}{2c}$

159. Algebrai egész, algebrai tört

Algebrai egész: Olyan egytagú algebrai kifejezés, amelyben nincs osztás (nincs tört alakú kifejezés), vagy ha szerepel benne osztás, (tört alakú kifejezés) akkor az osztóban, (nevezőben) nincs változó.

Példa: Algebrai egészek: $3a^2b$; $-7a^2d : 5$; $4{,}7ab$; $\frac{3}{7}a^2b$; $\frac{3bd^4}{5}$

Algebrai tört: Az az egytagú algebrai kifejezés, amelynek a nevezőjében (osztójában) van változó.

Példa: Algebrai törtek: $3a^2b : 2b$; $\frac{3b^5}{a}$; $\frac{2a^3d^2}{5d^4}$

160. Behelyettesítési érték

Behelyettesítési érték: Az algebrai kifejezés behelyettesítési értékét megkapjuk, ha a változók (betűk) helyére egy adott halmazból számokat írunk, és ezekkel elvégezzük a jelölt műveleteket.

Példa: Számítsuk ki a következő algebrai kifejezés behelyettesítési értékét!

$a = 3$; $b = 2$; $c = 5$; $d = 4$

$6a^2 + bc - 7d = 6 * 3^2 + 2*5 - 7 * 4 = 54 + 10 - 28 = 36$

161. Algebrai kifejezések összevonása

Összeadni és kivonni csak egynemű algebrai kifejezéseket lehet. A műveleteket az együtthatókkal végezzük.

Példa: $3a + 5a = 8a$ $5bc - 3bc = 2bc$ $4ab^2 + 5b - 2ab^2 = 2ab^2 + 5ab$

$4a^3b + 7a^3b = 11a^3b$ $5b^2c^2d - 3b^2c^2d + 3bd = 2b^2c^2d + 3bd$

$9x^3y^4z - 7x^3y^4z + 2x^3y^4z = 4x^3y^4z$

162. Egytagú algebrai kifejezések szorzása

Egytagú algebrai kifejezések szorzásakor először az együtthatókat szorozzuk , majd a betűkkel (változókkal) végezzük el a szorzást, alkalmazva a hatványozás szabályait. Azokat a betűket (változókat), amik csak egy szorzótényezőben szerepelnek, változatlanul leírjuk.

Példa:

$$2a * 3ab = 6a^2b \qquad bc^2 * 2abc = 2ab^2c^3 \qquad 2ab * 3a^2 * 2ab = 12a^4b^2$$

$$4a^3bd * 7a^2b^2c^3 = 28a^5b^3c^3d \qquad 5b^2c^2d * 3ac^4de^3 = 15ab^2c^6d^2e^3$$

$$2{,}5x^3y^4z * 4x^2z^2 * \frac{1}{2}x^2yv = 5x^7y^5z^3v$$

163. Többtagú algebrai kifejezés szorzása egytagúval

Ha többtagú algebrai kifejezést szorzunk egytagúval a többtagú algebrai kifejezés minden tagját szorozzuk az egytagú kifejezéssel.

Példa:

$$2b(3a + c) = 6ab + 2bc$$

$$2a\,(3a^3b + 7a^2) = 6a^4b + 14a^3$$

$$2ab^2(5b^2 - 3d + 2b) = 10ab^4 - 6ab^2d + 4ab^3$$

164. Többtagú algebrai kifejezés szorzása többtagúval

Ha többtagú algebrai kifejezést szorzunk többtagúval, a szorzandó minden tagját szorozzuk a szorzó minden tagjával, majd összevonunk.

Példa:

$$(2c + 2b)(3b + c) = 6bc + 2c^2 + 6b^2 + 2bc = 6b^2 + 2c^2 + 8bc$$

$$(3b - 2a)\,(3a^3b + 7a^2) = 9a^3b^2 + 21a^2b - 6a^4b - 14a^3$$

$$(2a + 3b^2)(5b^2 - 3d + 2b) = 10ab^2 - 6ad + 4ab + 15b^4 - 9b^2d + 6b^3$$

165. Két tag összegének a négyzete

Két tag összegének a négyzete mindig három tagot ad: az első tag négyzete + az első és második tag szorzatának a kétszerese + a második tag négyzete:

$$\mathbf{(a+b)^2} = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \mathbf{a^2 + 2ab + b^2}$$

Példa: $(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

$(bc^2 + 2abc)^2 = b^2c^4 + 4ab^2c^3 + 4a^2b^2c^2$

166. Két tag különbségének a négyzete

Két tag különbségének a négyzete mindig három tagot ad: az első tag négyzete – az első és második tag szorzatának a kétszerese + a második tag négyzete:

$$\mathbf{(a-b)^2} = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = \mathbf{a^2 - 2ab + b^2}$$

Példa: $(2a-3b)^2 = 4a^2 - 12ab + 9b^2$

$(bc^2 - 2abc)^2 = b^2c^4 - 4ab^2c^3 + 4a^2b^2c^2$

167. Ugyanazon két tag összegének és különbségének a szorzata

Ugyanazon két tag összegének és különbségének a szorzata mindig két tagot ad: az első tag négyzete – a második tag négyzete:

$$\mathbf{(a+b)(a-b)} = a^2 - ab + ab - b^2 = \mathbf{a^2 - b^2}$$

Példa: $(2a-3b)(2a+3b) = 4a^2 - 9b^2$

$(bc^2 + 2abc)(bc^2 - 2abc) = b^2c^4 - 4a^2b^2c^2$

168. Kiemelés

ÖSSZEG FELÍRÁSA SZORZAT ALAKBAN

$\underbrace{4*3 + 4*4 + 4*2 - 4*7 = 8} \Longrightarrow \underbrace{4*(3+4+2-7) = 8}$

Összeg
(A műveleti sorrend szerint az utolsó művelet összeadás vagy kivonás.)

Szorzat
(A műveleti sorrend szerint az utolsó művelet szorzás.)

$\underbrace{5^2 + 2*5*3 + 3^2 = 64} \Longrightarrow \underbrace{(5+3)*(5+3) = 64}$

Összeg
(A műveleti sorrend szerint az utolsó művelet összeadás vagy kivonás.)

Szorzat
(A műveleti sorrend szerint az utolsó művelet szorzás.)

Kiemelés: Az összeg minden tagjában előforduló tényezőket „kiemeljük" a zárójel elé, majd ezekkel a tényezőkkel az eredeti kifejezés minden tagját elosztjuk. A zárójelbe a hányadosok összege kerül.

Példa: $3a + 5ab - 2ab^2 = a(3 + 5b - 2b^2)$

$$15a^3b^2c - 10abc^2 - 20a^2b^2c = 5abc(3a^2b - 2c - 4ab)$$

Az összeg a nevezetes azonosságok segítségével is felírható szorzat alakban.

Példa: $9a^2 - 25b = (3a)^2 - (5b)^2 = (3a - 5b)(3a + 5b)$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon lévő kéttagú összeg két, négyzet alakra hozható kifejezés különbsége!

$$16a^2b^4 - 36c^6 = (4ab^2)^2 - (6c^3)^2 = (4ab^2 + 6c^3)(4ab^2 - 6c^3)$$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon lévő kéttagú összeg két, négyzet alakra hozható kifejezés különbsége!

$$4a^2 + 9b^2 + 12ab = (2a)^2 + (3b)^2 + 12ab = (2a + 3b)^2$$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon lévő háromtagú összeg két tagja négyzet alakra hozható kifejezés, a harmadik tagban, pedig nem szerepel az előbbi kettőben lévőktől eltérő változó! Ilyenkor érdemes próbálkozni két tag összegének, illetve két tag különbségének a négyzetével.

$$25a^4 - 10a^2d^5 + d^{10} = (5a^2)^2 - 10a^2d^5 + (d^5)^2 = (5a^2 - d^5)^2$$

Vegyük észre, hogy a bal oldalon lévő háromtagú összeg két tagja négyzet alakra hozható kifejezés, a harmadik tagban, pedig nem szerepel az előbbi kettőben lévőktől eltérő változó! Ilyenkor érdemes próbálkozni két tag összegének, illetve két tag különbségének a négyzetével.

169. Halmaz, halmaz eleme

Halmaz: alapfogalom

Jelentése körülírva: csoport, dolgok összessége

Elnevezése: ábécé nagybetűivel

A **halmaz eleme:** alapfogalom

Jelentése körülírva: a halmazba tartozó dolog

A halmaz elemeinek elnevezése: ábécé kisbetűivel

Az elem halmazba tartozásának jelölése: $b \in D$,

b eleme a D halmaznak

$$c \in B$$

c eleme a B halmaznak

170. A halmaz megadása, mikor egyenlő két halmaz?

A halmaz megadható:

1. Összes elemének felsorolásával:

Olvasd: Az **A** halmaz legyen egyenlő!

Példa:

A**:=** {2;4;6;8}

B**:=** {hétfő, kedd, szerda, csütörtök, péntek, szombat, vasárnap}

2. Olyan tulajdonság megadásával: amely a halmaz minden elemére jellemző, és csak a halmaz elemeire jellemző.

Példa:

C:= {Az összes, 8-nál nem nagyobb pozitív páros szám.}

(Ugyanez jelekkel: C:= $\{a|\ 0 < a \le 8;\ a \in N\ ;\ a \text{ páros}\}$

D:={A hét napjai.}

A halmazt akkor tekintjük megadottnak, ha tetszőleges dologról egyértelműen eldönthető, hogy eleme a halmaznak, vagy nem.

A következő definíciók nem határoznak meg halmazt:

F:={Szép lányok}

G:={Jó filmek}

Nem egyértelmű, hogy az F és G csoportba mely elemek tartoznak, hiszen pl. a jó film fogalma minden embernek mást-mást jelenthet.

Két halmaz akkor, és csak akkor egyenlő, ha mindkettő ugyanazokat az elemeket tartalmazza.

Példa:

A**:=** {2;4;6;8}

B**:=** {hétfő, kedd, szerda, csütörtök, péntek, szombat, vasárnap}

C:= {Az összes 8-nál nem nagyobb pozitív páros szám.}

D:={A hét napjai.}

A = C

B = D

171. A halmaz számossága, üres halmaz, végtelen halmaz.

A halmaz számossága: A véges halmaz elemeinek a száma. Jelölése: $|A|=$

A halmazban minden elem csak egyszer szerepel.

A következő halmazmegadás helytelen:

M:= {2; 5; 9; 9; 9; 9}

Helyesen:

M:= {2; 5; 9}

Attól, hogy az osztályban névsorolvasáskor ugyanannak a tanulónak a nevét többször felolvassuk, nem változik az osztály összetétele.

Példa: A**:=** {2;4;6;8} |A| = 4 *(Az* A *halmaz számossága 4. Az* A *halmaz 4 elemű halmaz.)*

B**:=** {hétfő, kedd, szerda, csütörtök, péntek, szombat, vasárnap} |B| = 7 *(A* B *halmaz számossága 7. A* B *halmaz 7 elemű halmaz.)*

Üres halmaz: Nincs eleme. Jelölése: D:={ } vagy E:= ∅
Végtelen halmaz: Végtelen sok eleme van.

Példa: A**:=** {A Holdon járt magyar űrhajósok.} Az A halmaz jelenleg még üres halmaz.

B:={Páros számok} A B halmaz végtelen halmaz.

172. Alaphalmaz, részhalmaz, diszjunkt halmaz, Venn-diagram

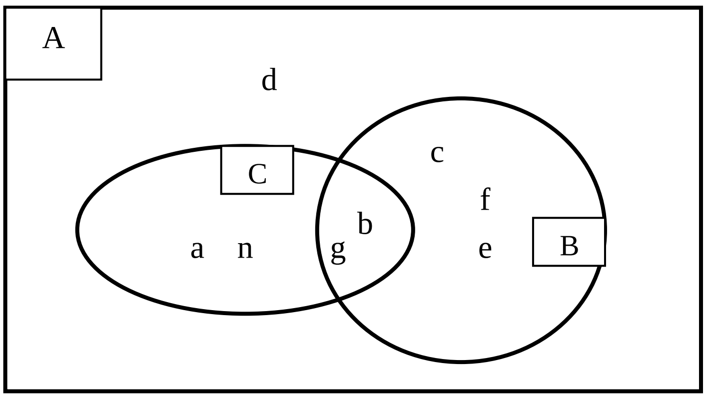
Alaphalmaz: azoknak az elemeknek az összessége, amelyeket vizsgálunk.
Részhalmaz: A **B** halmaz részhalmaza **C** halmaznak (**B** $\subset$ **C**), ha a **B** halmaz minden eleme benne van a **C** halmazban.

Példa: B:= {**a**; **b**; **g**; **n**} C:= {**a**; **b**; c; d; e; **g**; **n**} B $\subset$ C

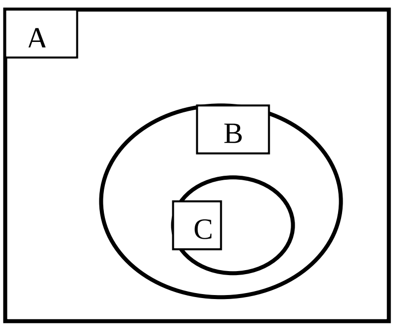
Néhány könyv használja a: **Valódi részhalmaz** fogalmát:
E valódi részhalmaza **F**-nek (E $\subset$ F) akkor, ha **E** halmaz minden eleme benne van az **F**-ben, de E $\neq$ F.
és a **Nem valódi részhalmaz** fogalmát: **E** nem valódi részhalmaza **F**-nek (E $\subseteq$ F) ha **E** = **F**

Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza.
Diszjunkt (idegen) halmazok: Az A és B halmazok diszjunktak, ha nincs közös elemük.
A halmazokat **Venn-diagram**mal (halmazábra) szemléltetjük: a halmazt zárt síkidommal ábrázoljuk, a halmaz elemeit ebben a síkidomban helyezzük el.

Példa: **1.**

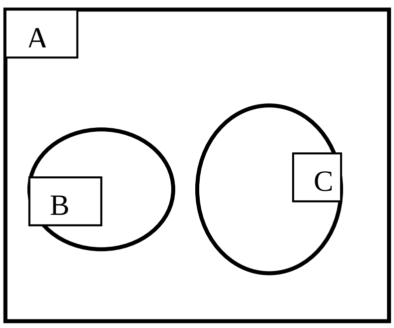


2.



B $\subset$ A
C $\subset$ B
C $\subset$ A

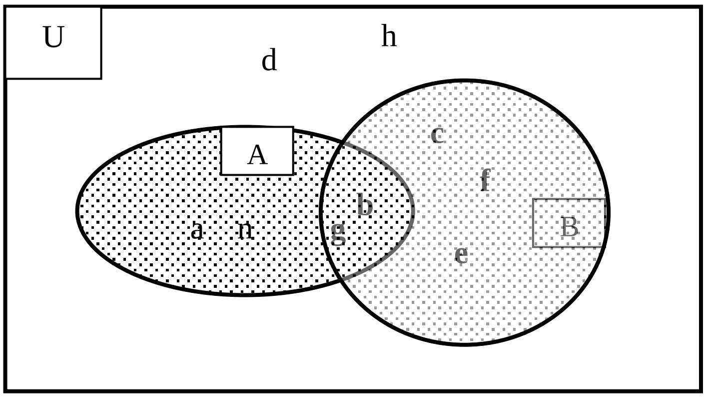
3.



B és C
diszjunkt
halmazok

173. Halmazok uniója

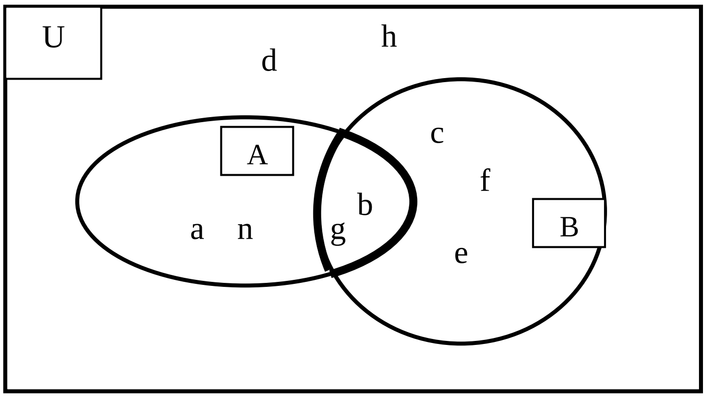
Halmazok egyesítettje (uniója): Az **A** és **B** halmazok uniója (**A ∪ B**) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek az **A** és **B** halmaz közül legalább az egyikben benne vannak.



A ∪ B = {a; b; c; e; f; g; n}

174. Halmazok metszete

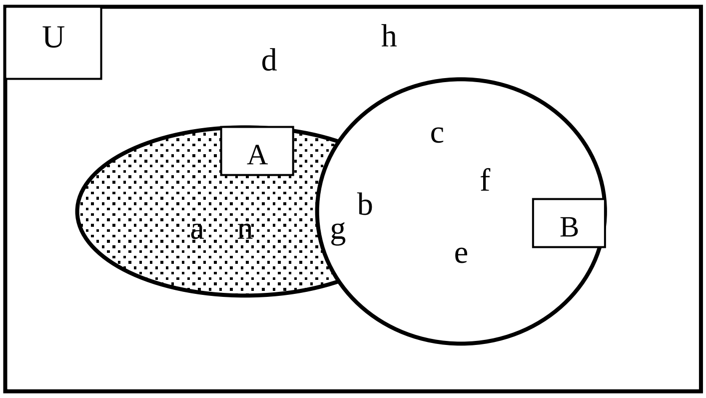
Halmazok metszete (közös része): Az **A** és **B** halmazok metszete (**A ∩ B**) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek az **A** és **B** halmazban is benne vannak.



A ∩ B = {b; g}

175. Halmazok különbsége

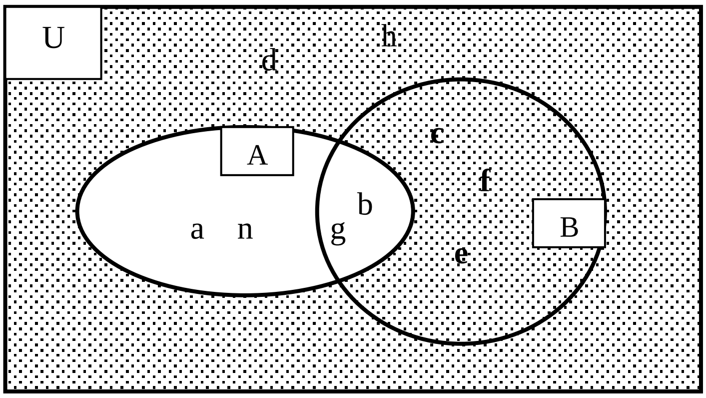
Halmazok különbsége: Az **A** és **B** halmazok különbsége (**A \ B**) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek az **A** halmaznak elemei, de a **B** halmaznak nem..



A \ B = {a; n}

176. Kiegészítő halmaz

Kiegészítő (komplementer) halmaz: Az **U** alaphalmazra nézve az **A** halmaz komplementere ($\overline{\mathbf{A}}$) azoknak az elemeknek a halmaza, amelyek az **A** halmazt kiegészítik alaphalmazzá.



$\overline{\mathbf{A}}$ **= {c; d; e; f; h}**

177. $\sqrt{a}$ fogalma

$\sqrt{\mathbf{a}}$ ($\mathbf{a} \geq 0$, $\mathbf{a} \in R$) jelenti azt a nem negatív számot, amelynek a négyzete **a**.

$\sqrt{}$: négyzetgyök

Ha $\sqrt{a}$ **= b** ($a, b \geq 0$) **akkor** $\mathbf{b^2 = a}$**.**

A $\mathbf{b^2 = a}$ *jól szemlélteti, hogy a gyökjel alatt lévő* **a** *szám sosem lehet negatív, hiszen a páros kitevőjű hatványok mindig nem negatívak.*

Ebből következik, hogy a $\sqrt{-9}$; $\sqrt{-21}$; $\sqrt{-4{,}56}$ *stb. értelmetlenek.*

Példa:

$\sqrt{9} = 3$	mert	$3^2 = 9$
$\sqrt{25} = 5$	mert	$5^2 = 25$
$\sqrt{49} = 7$	mert	$7^2 = 49$
$\sqrt{81} = 9$	mert	$9^2 = 81$
$\sqrt{5} \approx 2{,}236$	mert	$2{,}236^2 \approx 5$

A négyzetgyökvonás nem végezhető el korlátozás nélkül a racionális számok halmazában. A művelet eredménye lehet irracionális szám. Pl.: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{5}$; irracionális számok. Ezek tizedes tört alakja végtelen nem szakaszos tizedes tört.

$\sqrt{a}$ értéke kétoldali közelítéssel kiszámolható. Példa:

Becsüljük meg $\sqrt{5}$ értékét kétoldali közelítéssel!

$$\mathbf{2} < \sqrt{5} < \mathbf{3}$$

mert

$$2^2 = 4 < 5 < 3^2 = 9$$

$$\mathbf{2} < \sqrt{5} < \mathbf{2{,}5}$$

mert

$$2^2 = 4 < 5 < 2{,}5^2 = 6{,}25$$

$$\mathbf{2} < \sqrt{5} < \mathbf{2{,}25}$$

mert

$$2^2 < 5 < 2{,}25^2 = 5{,}0625$$

$$\mathbf{2{,}125} < \sqrt{5} < \mathbf{2{,}25}$$

mert

$$2{,}125^2 = 4{,}5156 < 5 < 2{,}25^2 = 5{,}0625$$

$$\mathbf{2{,}1875} < \sqrt{5} < \mathbf{2{,}25}$$

mert

$$2{,}1875^2 = 4{,}7851 < 5 < 2{,}25^2 = 5{,}0625$$

Kiderült, hogy $\sqrt{5}$ a **2,1875** és a **2,25** közé eső szám. Tovább folytatva, még nagyobb pontossággal kerülnénk közelebb $\sqrt{5}$-höz, amely végtelen nem szakaszos tizedes tört, mert $\sqrt{5}$ irracionális szám.

178. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{5}$ irracionális szám! Az irracionális számok pontosan azok a valós számok, amelyek nem írhatók fel két egész szám hányadosaként. Bizonyítsuk tehát azt, hogy $\sqrt{5}$ nem írható fel két egész szám hányadosaként! A bizonyítást **indirekt** (közvetett, nem egyenes) módon végezzük. Ennek a lényege, hogy állítunk valamit. Azután, ennek a tagadásáról bebizonyítjuk, hogy nem igaz, amiből aztán az eredeti állításunk igazsága következik.

Bizonyítandó: A $\sqrt{5}$ **nem írható fel** két egész szám hányadosaként.

Tegyük fel: A $\sqrt{5}$ **felírható** két egész szám hányadosaként! (Vegyük észre, hogy ez a bizonyítani kívánt állításunk tagadása.) Ha felírható, hát írjuk fel!

$$\sqrt{\mathbf{5}} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$$

ahol **a, b** $\in$ **Z,** és legnagyobb közös osztójuk 1. (a;b) = 1.
Vegyük az egyenlet mindkét oldalának a négyzetét, majd szorozzuk mindkét oldalt $\mathbf{b}^2$-tel!

$$\mathbf{5} = \frac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{b}^2} \qquad // * \mathbf{b}^2$$

$$\mathbf{5b^2 = a^2}$$

A bal oldal osztható 5-tel, de akkor a vele egyenlő jobb oldal is osztható 5-tel. Az 5 prímszám, ezért $\mathbf{a}^2$ csak akkor osztható 5-tel, ha **a** is osztható 5-tel.
Ekkor viszont $\mathbf{a}^2$ osztható 25-tel.

*Ha **a** osztható 5-tel, akkor felírható a= 5*d alakban, ahol d egész szám. Ekkor* $\mathbf{a^2}$ *=(5*d)*(5*d) ahonnan* $\mathbf{a^2}$*=25*d*d, vagyis:*

$$5b^2 = 25 * d*d$$

A jobb oldal osztható 25-tel, akkor a vele egyenlő bal oldal is osztható 25-tel, ami csak úgy lehetséges, ha **b** osztható 5-tel, vagyis az 5 közös osztója **a**-nak és **b**-nek, ami nyilvánvalóan hamis, hiszen kezdő kikötésként szerepelt, hogy **a** és **b** legnagyobb közös osztója 1.

Az a feltevés, hogy a $\sqrt{5}$ felírható két egész szám hányadosaként, az

$$5b^2 = a^2$$

hamis állításhoz vezetett.

Így a $\sqrt{5}$ **felírható** két egész szám hányadosaként állítás **hamis**. Ekkor azonban **igaz az ellentettje:** $\sqrt{5}$ **nem írható** fel két egész szám hányadosaként, azaz $\sqrt{5}$ irracionális szám.

Ezzel eredeti állításunkat bebizonyítottuk.

179. Négyzetgyökös kifejezések összevonása.

Összevonni csak olyan négyzetgyökös kifejezéseket tudunk, ahol a gyök alatt ugyanaz a kifejezés van.

Példa: $3\sqrt{6}+5\sqrt{6}=8\sqrt{6}$ $\quad$ $7\sqrt{5}-2\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

$4\sqrt{5}+2\sqrt{7}=$ Csak a négyzetgyökvonás elvégzése után végezhető el az összeadás.

180. Szorzat négyzetgyöke.

Szorzat négyzetgyöke: Szorzatból úgy is vonhatunk négyzetgyököt, hogy a tényezők négyzetgyökének a szorzatát vesszük.(Szorzatból tényezőnként is lehet négyzetgyököt vonni.)

$$\sqrt{a*b}=\sqrt{a}*\sqrt{b} \qquad a, b \ge 0$$

Példa: $\sqrt{5*6}=\sqrt{5}*\sqrt{6}$ $\quad$ $\sqrt{7*3}=\sqrt{7}*\sqrt{3}$

181. Tört (hányados) négyzetgyöke

Tört (hányados) négyzetgyöke: Törtből (hányadosból) úgy is vonhatunk négyzetgyököt, hogy a számlálóból és a nevezőből (osztandóból, osztóból) is négyzetgyököt vonunk.

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad a \ge 0 ;b > 0$$

$$\sqrt{a:b}=\sqrt{a}:\sqrt{b} \qquad a \ge 0 ;b > 0$$

Példa: $\sqrt{5:6}=\sqrt{5}:\sqrt{6}$ $\quad$ $\sqrt{7:36}=\sqrt{7}:\sqrt{36}=\sqrt{7}:6$

$$\sqrt{\frac{7}{20}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}} \qquad \sqrt{\frac{9}{15}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{15}}=\frac{3}{\sqrt{15}}$$

182. Nem negatív szám n-edik hatványának négyzetgyöke

Nem negatív szám n-edik hatványának négyzetgyöke: egyenlő a nem negatív szám négyzetgyökének n-edik hatványával.

$$\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n \qquad a \geq 0 \quad n \in N$$

Példa: $\sqrt{16^3} = \left(\sqrt{16}\right)^3 = 4^3$ $\qquad \sqrt{7^5} = \left(\sqrt{7}\right)^5$

183. Négyzetgyökvonás páros kitevőjű hatvány esetén

Hatvány négyzetgyöke: pozitív hatványból úgy vonunk négyzetgyököt, hogy a hatványkitevőt elosztjuk 2-vel.

$$\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{2}} \qquad a \geq 0 \quad n \in N$$

Ez utóbbi műveletet egyelőre csak páros n esetén használjuk, mert tört kitevőről az általános iskolában nem tanulunk.

Példa: $\sqrt{5^4} = 5^2$ $\qquad \sqrt{7^2} = 7$ $\qquad \sqrt{3^8} = 3^4$

184. Az x^2 =a egyenlet gyökei

Az **x^2 = a (a>0)** egyenletnek mindig két különböző megoldása van.

$x_1 = \sqrt{a}$

$x_2 = -\sqrt{a}$

Az **x^2 = a (a=0)** egyenletnek mindig két azonos megoldása van.

$x_1 = 0$

$x_2 = 0$

Az **x^2 = a (a<0)** egyenletnek nincs megoldása.

Példa: 1.

$x^2 = 36$
$x_1 = \underline{\underline{6}}$
$x_2 = \underline{\underline{-6}}$

Ellenőrzés: $6^2 = 36$
$(-6)^2 = 36$

2.

$x^2 = -9$

Az egyenletnek nincs megoldása, hisz egyetlen szám négyzete sem negatív.

185. A reláció fogalma

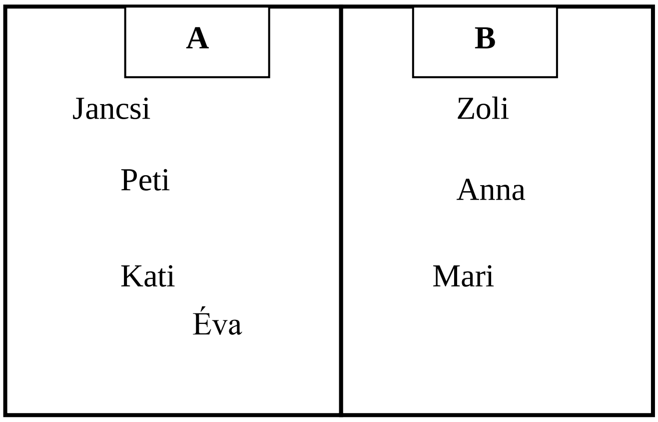
Kapcsolat, hozzárendelés, reláció: Adott **A** és **B** nem üres halmazok elemeiből alkossunk rendezett párokat az összes lehetséges módon úgy, hogy a pár első eleme mindig az **A**, a második eleme mindig a **B** halmazból kerüljön ki! Az így kapott, párokból álló halmaz bármely nem üres részhalmazát az **A** és **B** halmaz elemei közötti kapcsolatnak, hozzárendelésnek, **relációnak** nevezzük.

(A párok attól rendezettek, hogy első tagjuk mindig az **A** *halmazból, második tagjuk, pedig mindig a* **B** *halmazból kerül ki.)*

Az **A** és **B** halmaz elemeiből rendezett párokat képző műveletet (*A két halmaz Descartes-szorzatát.)* **A ✕ B**-vel jelöljük. (Olvasd: *a* kereszt *b*)

Példa: A:= {Jancsi; Peti; Kati; Éva}
B:= {Zoli; Mari; Anna}

A ✕ B = {(Jancsi; Zoli), (Jancsi; Mari), (Jancsi; Anna), (Peti; Zoli), (Peti; Mari), (Peti; Anna), (Kati; Zoli), (Kati; Mari), (Kati; Anna), (Éva; Zoli), (Éva; Mari), (Éva; Mari)**}** Vegyük észre, hogy az A ✕ B halmaz elemei mindig párok!



Az **A** táblára felírt gyerekek párt keresnek maguknak a **B** táblára írt gyerekek közül. A párok kialakulásával a két csoport között kapcsolat, reláció jön létre.

(A továbbiakban a kapcsolat szó helyett időnként a vele megegyező, a matematikában alkalmazott reláció szót használjuk.)

Bárhogyan alakulnak is ki, a létrejövő párok biztosan benne vannak az **A ✕ B** halmazban, amely a két gyerekcsoport közötti összes lehetséges párt megadja.
Belátható, hogy a kialakult, a párokkal jellemzett kapcsolat valóban az **A ✕ B** halmaz részhalmaza.
Nézzünk egy lehetséges párosítást!
Tegyük fel, hogy Jancsi és Peti egyaránt Zolit, Kati, pedig Marit kapta társnak. Éva nem kapott párt. Ebben a kapcsolatban Annának sincs párja. A létrejött relációt nevezzük **r**-nek!

A továbbiakban azt fogjuk vizsgálni, hogyan lehet tudatni a párosítás eredményeként létrejött kapcsolatot minél pontosabban, minél szemléletesebben, és a matematika elvárásainak megfelelően az érdeklődőkkel.

Vezessünk be néhány új fogalmat!

186. Alaphalmaz, képhalmaz

Az a halmaz, ahonnan a rendezett párok első elemei kerülnek ki az **alaphalmaz**. A második elemeket tartalmazó halmaz a **képhalmaz**. A két halmaz elemei között lehetnek azonosak is, sőt az alaphalmaz és a képhalmaz azonos is lehet.

187. Mikor tekintjük megadottnak a relációt?

A kapcsolatot, relációt akkor tekintjük megadottnak, ha ismert az alaphalmaz, a képhalmaz, és egyértelműen kiderül, hogy az alaphalmaz bármely eleméhez melyik elem tartozik a képhalmazban.

188. A reláció megadásának módjai

1.*A párok felsorolásával:* *Meg kell adni a két halmazt.*

A:= {Jancsi; Peti; Kati; Éva} B:= {Zoli; Mari; Anna}

Meg kell adni a párokat, és a reláció nevét.

r = {(Jancsi; Zoli), (Peti; Zoli), (Kati; Mari)}

Minden elvárást teljesítettünk. Megadtuk a relációt. Ez a megadási mód azonban már néhány tíz pár esetén áttekinthetetlen.

2.*Táblázattal:* A:= {Jancsi; Peti; Kati; Éva} B:= {Zoli; Mari; Anna}

Az A *és* B *halmaz elemét jelölje* a *illetve* b.

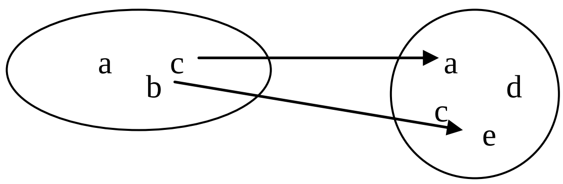
Az r reláció táblázata:

a	Jancsi	Peti	Kati
b	Zoli	Zoli	Mari

Gyakran alkalmazott megadási mód.

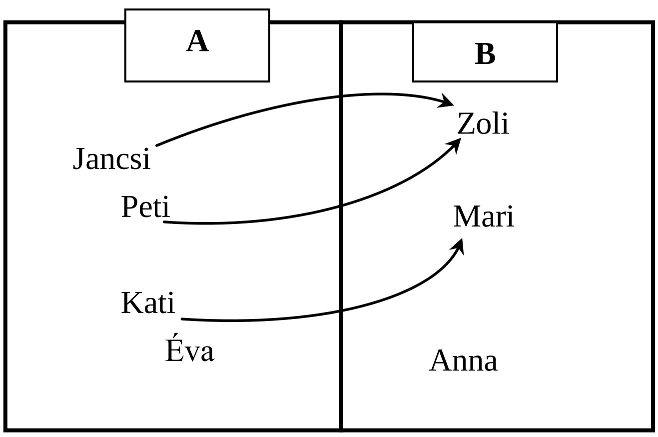
3.*Nyíldiagrammal:*

A nyíldiagramnál használt halmazábránál mindig két külön síkidomot használunk. Itt még akkor sincs közös rész, ha vannak azonos elemek a két halmazban: Pl.:



Az r kapcsolat nyíldiagramja.

Kössük össze nyíllal a párokat!



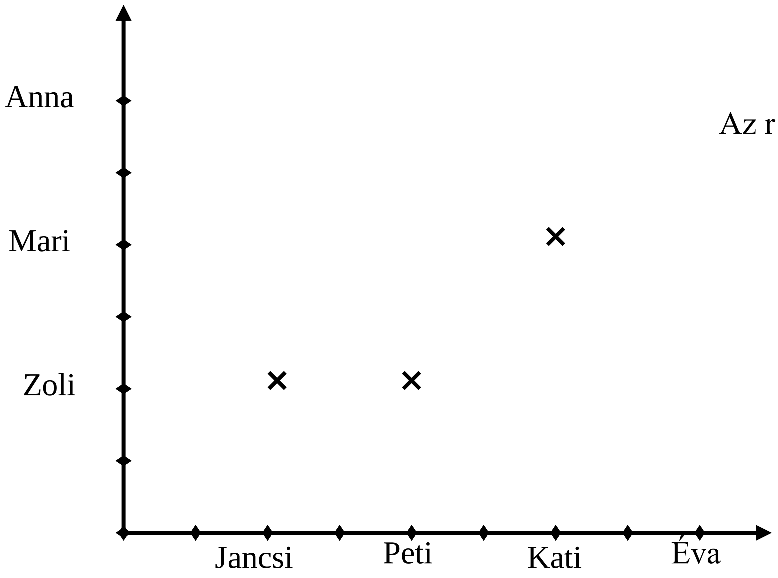
4.Szöveges szabály, vagy képlet*:* A:= {Jancsi; Peti; Kati; Éva}
B:= {Zoli; Mari; Anna}

A szabály legyen a következő:

r:= {Minden A-halmazbeli gyereknek az a párja a B halmazban, akinek ugyanannyi testvére van, mint neki.}

Belátható, hogy ez a szabály valóban megadja a párokat. Számhalmazoknál a szöveges szabály helyett a képletet részesítik előnyben.

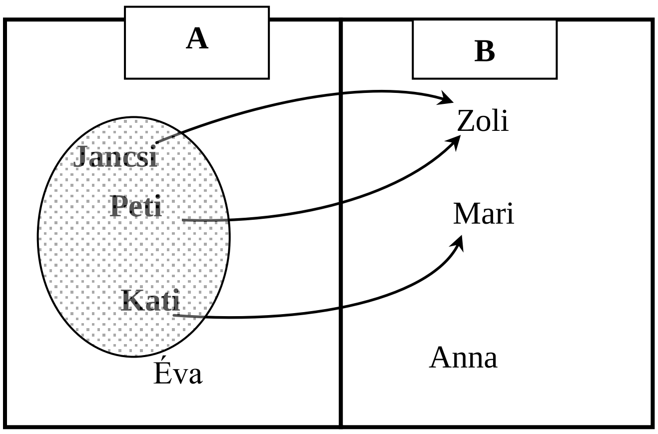
4.Grafikon*:*



Az r reláció grafikonja.

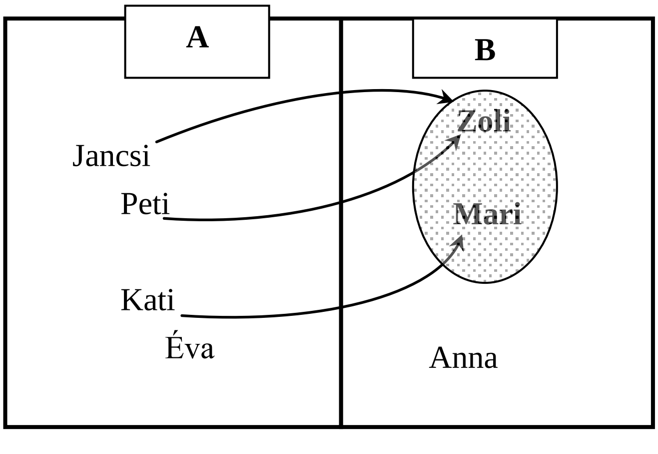
189. A reláció értelmezési tartománya, értékkészlete.

A reláció értelmezési tartományát az alaphalmaznak azok az elemei alkotják, amelyekhez az adott kapcsolatban tartozik képhalmazbeli elem. Az értelmezési tartomány jele legyen: ÉT



Az **r** reláció értelmezési tartománya: $ÉT_r$ = {Jancsi, Peti, Kati}

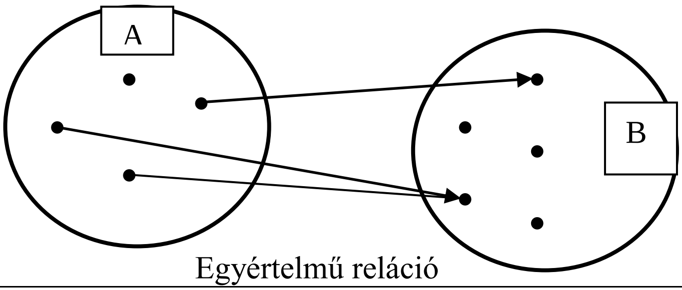
A reláció értékkészletét a képhalmaznak azok az elemei alkotják, amelyekhez az adott kapcsolatban tartozik alaphalmazbeli elem. Az értékkészlet jele legyen: ÉK



Az r reláció értékkészlete: $ÉK_r$ = {Mari, Zoli}

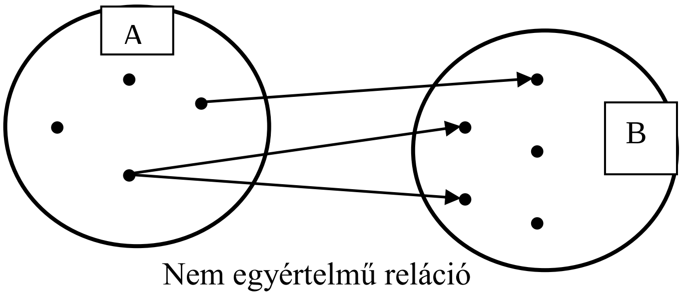
190. Egyértelmű reláció, nem egyértelmű reláció, kölcsönösen egyértelmű reláció

Egyértelmű reláció az A és B halmaz között: az **A** halmaz bármely eleméhez legfeljebb egy **B** halmazbeli elem tartozik.



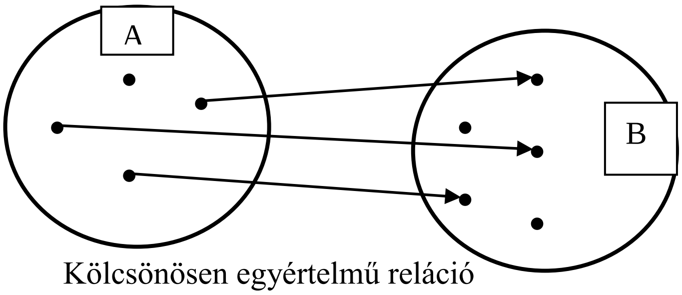
Egyértelmű reláció

Nem egyértelmű reláció az A és B halmaz között: az **A** halmaznak van olyan eleme, amelyhez egynél több **B** halmazbeli elem tartozik.



Nem egyértelmű reláció

Kölcsönösen egyértelmű reláció az A és B halmaz között: az **A** halmaz bármely eleméhez legfeljebb egy **B** halmazbeli elem tartozik, és a **B** halmaz bármely eleméhez legfeljebb egy **A** halmazbeli elem tartozik

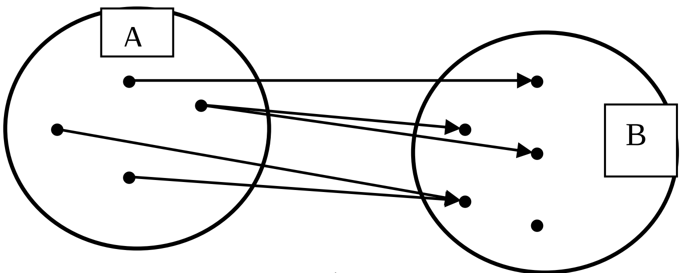


Kölcsönösen egyértelmű reláció

191. Leképezés, függvény

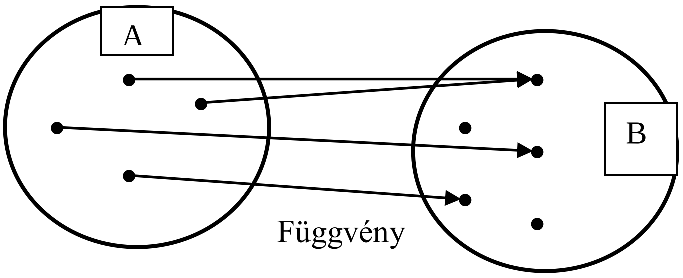
Leképezés az A és B halmaz között: az **A** halmaz **minden** eleméhez tarozik egy vagy több **B** halmazbeli elem.

A leképezést érthetjük úgy is, hogy az egész alaphalmazt „lefényképeztük”, és a képek ott vannak a képhalmazban.



Leképezés

Függvény: olyan leképezés az **A** és **B** halmaz között, amelyben az **A** halmaz **minden** eleméhez **pontosan egy B** halmazbeli elem tarozik.



A függvény alaphalmaza mindig megegyezik az értelmezési tartományával.

192. Szám-szám függvény, pont-pont függvény

Szám-szám függvény: olyan függvény, ahol az alaphalmaz és a képhalmaz is **számhalmaz**.
Pont-pont függvény: olyan függvény, ahol az alaphalmaz és a képhalmaz is **ponthalmaz**.

193. A függvény értelmezési tartománya, értékkészlete, független változó, függő változó

Az ***f*** **függvény értelmezési tartománya** ($ÉT_f$) a valós számoknak (R) az a nem üres részhalmaza ($ÉT_f \subset R$), amelynek minden eleméhez pontosan egy elemet rendelünk a képhalmazból.

Az ***f*** **függvény értékkészlete** ($ÉK_f$) a valós számoknak (R) az a nem üres részhalmaza ($ÉK_f \subset R$), amelynek minden eleméhez tartozik az értelmezési tartománynak legalább egy eleme.

A függvény értelmezési tartományának elemeit *(tetszőleges elemét jelöljük x-szel)* **független változó**nak, értékkészletének elemeit *(tetszőleges elemét jelöljük y-nal)* (x-től) **függő változó**nak nevezzük. A függő változókat nevezik **függvényérték**eknek is.

Nézzük a következő két függvényt!

$$f : A \to B,\ x \mapsto f(x) \qquad g : C \to D,\ x \mapsto g(x)$$

Az *f* és *g* függvény akkor, és csak akkor egyenlő, ha A = C, B = D, valamint minden $a \in$ A-ra $f(a) = g(a)$

Példa: Adjunk meg egy ***g*** függvényt több formában!

1. Képlettel: A:= {-2; 1; 2; 3} B:= {-5; -3; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 11}

$$g:\ A \to B$$

A képlet több alakban is megadható: g(x) = 2x +1 $x \mapsto$ 2x + 1 y = 2x +1

Mindhárom alak ugyanazt jelenti: az értelmezési tartomány tetszőleges ***x*** *eleméhez, a kétszeresénél 1-gyel nagyobb számot rendeli a függvény.*

A képlet és a képhalmaz ismeretében meghatározható az értékkészlet:

$$ÉK_g = \{3; 5; 9; 11\}$$

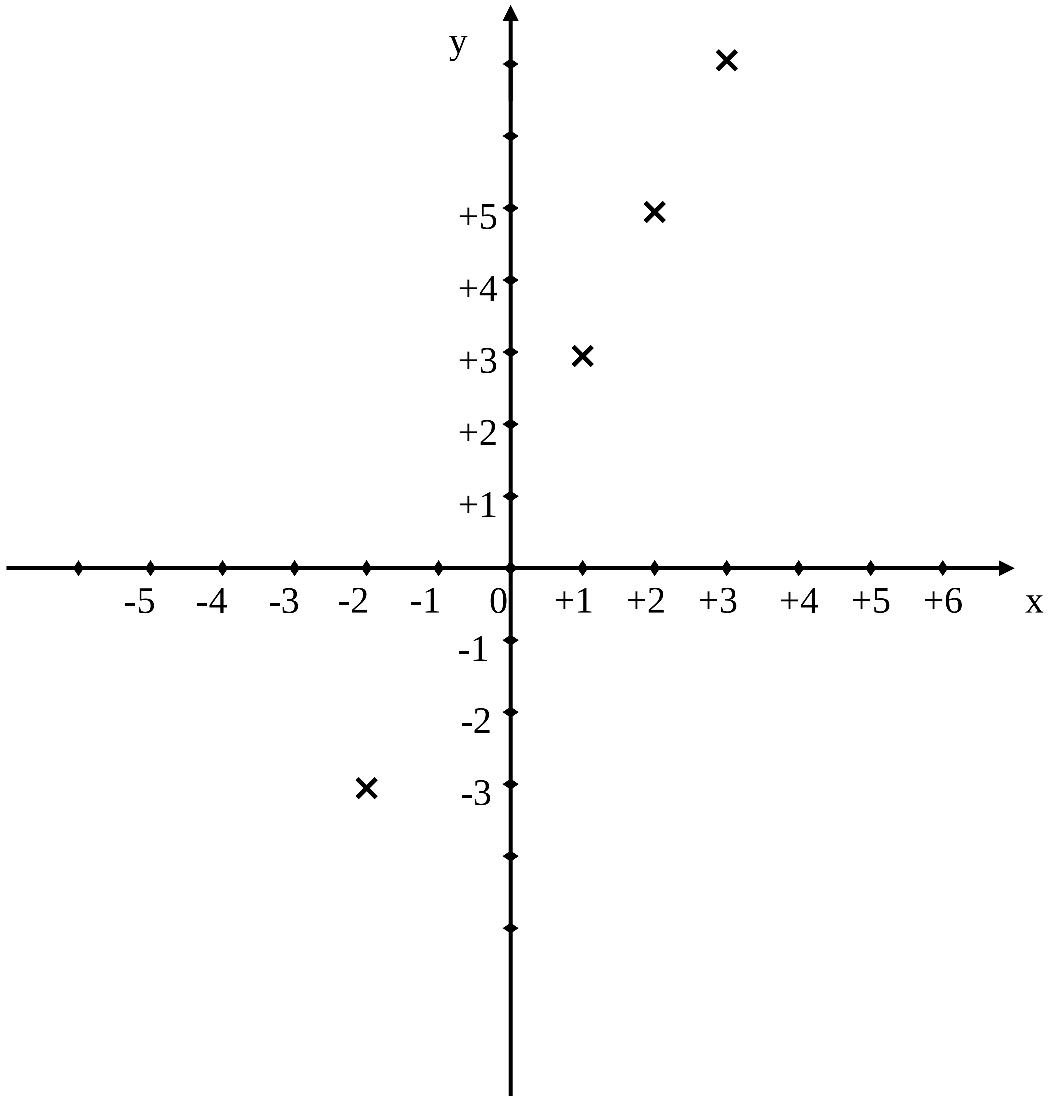
2. Táblázattal: A → B A:= {-2; 1; 2; 3} B:= {-5; -3; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 11}

x	-2	1	2	3
g(x)	-3	3	5	7

<u>3. Grafikonnal:</u>

A:= {-2; 1; 2; 3}
B:= {-5; -3; 3; 5; 6; 7; 8; 9; 11}

$A \to B$



<u>194. A függvény behelyettesítési értéke</u>

A függvény értelmezési tartományának bármely x elemét a képletbe írva, megkapjuk az adott x-hez tarozó helyettesítési értéket, vagyis x párját az értékkészlet elemei közül.

Pl: az x = 3-hoz tartozó függvényértéket keressük.

g(x) = 2x +1	$x \mapsto 2x + 1$	y = 2x +1
g(3) = 2*3 + 1	$3 \mapsto 2*3 + 1$	y = 2 * 3 + 1
g(3) = 7	***3*** $\mapsto$ **7**	**y = 7**

Az értelmezési tartomány bármely eleméhez tartozó érték ezzel az eljárással meghatározható.

<u>195. Lineáris függvény</u>

Valós függvénynek az olyan függvényt nevezzük, amely valós számokhoz rendel hozzá valós számokat.

$R \to R$

A lineáris függvény grafikonja mindig egyenes. Minden lineáris függvény megadható képlettel.

A képlet mindig:

f(x) = **a*x + b** alakú.

$a, b \in R$

(Az $x \mapsto$ a* x + b , és az y = a* x +b képleteket is használhatjuk.)

196. Konstans függvény

Nulladfokú (konstans) függvény: olyan lineáris függvény, ahol az

f(x) = a*x + b $a, b \in R$

képletben **a = 0**.

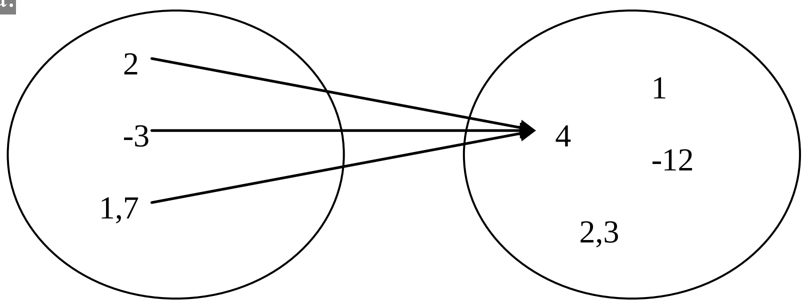
Képlete:

f(x) = b

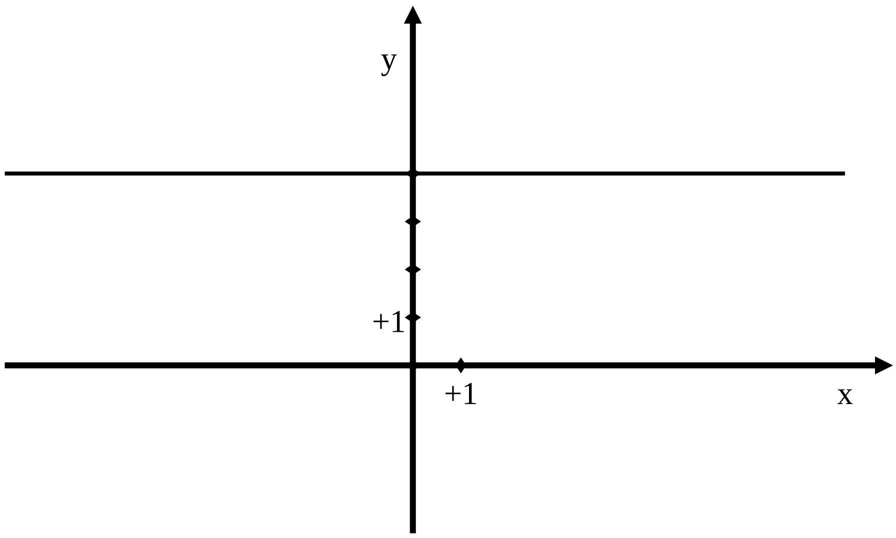
A konstans (állandó) függvény az értelmezési tartományának minden eleméhez ugyanazt a számot rendeli.

A konstans függvény grafikonja mindig az x tengellyel párhuzamos egyenes.

Példa:



Konstans függvény



Az $x \mapsto$ 4 képlettel megadott konstans függvény grafikonja.

Az $x \mapsto$ 0 képlettel megadott konstans függvény képe pontosan az x tengely.

197. Elsőfokú függvény, egyenes arányosság függvény

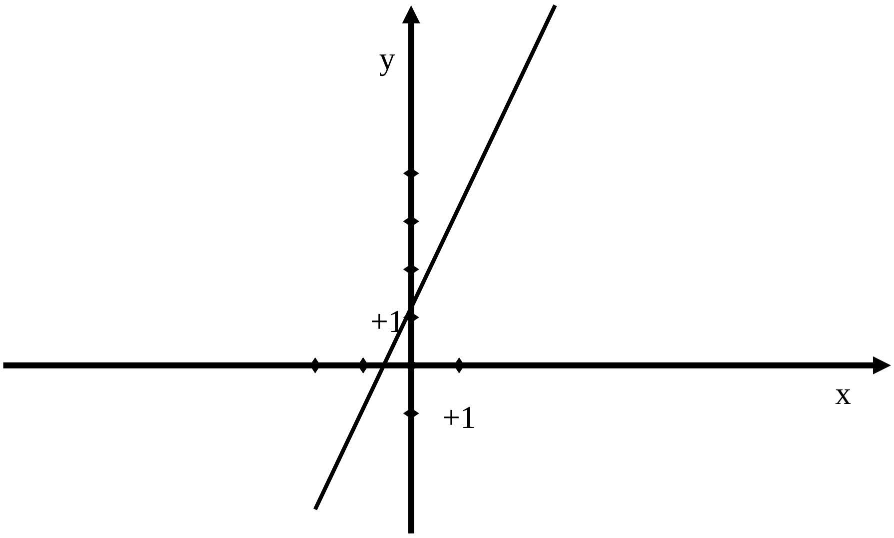
Elsőfokú függvény: Olyan lineáris függvény, ahol az

$$\mathbf{f(x) = a*x + b} \qquad a, b \in R$$

képletben $\mathbf{a \neq 0}$.

Az elsőfokú függvény a nevét onnan kapta, hogy a képletben az x az első hatványkitevőn szerepel (x^1). Az elsőfokú függvény grafikonja nem párhuzamos az x tengellyel.

Példa:



Az $x \mapsto 2x + 1$ képlettel megadott elsőfokú függvény grafikonja.

Egyenes arányosság A valós számok halmazán, (vagy valamely részhalmazán) értelmezett

$$\mathbf{f(x) = a*x} \qquad a \in R$$

képlettel megadott elsőfokú függvény.

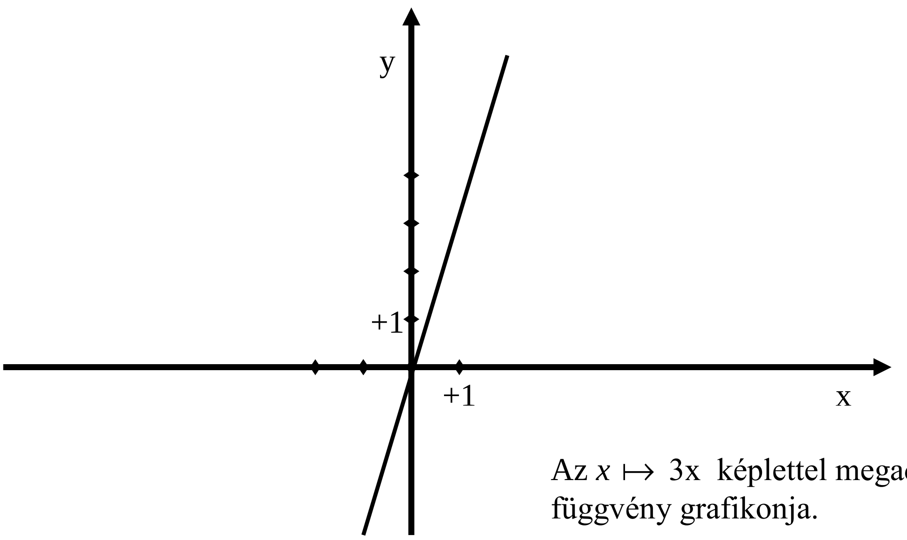
(Az $f(x) = a*x + b$ $a, b \in R$ képletben $b = 0$.)

Az egyenes arányosság képe mindig az origón áthaladó egyenes.

Az $y = a*x$ képletből a-t kifejezve:

$a =$ $x \neq 0$

látható, hogy az összetartozó értékek aránya állandó.



Az $x \mapsto 3x$ képlettel megadott egyenes arányosság függvény grafikonja.

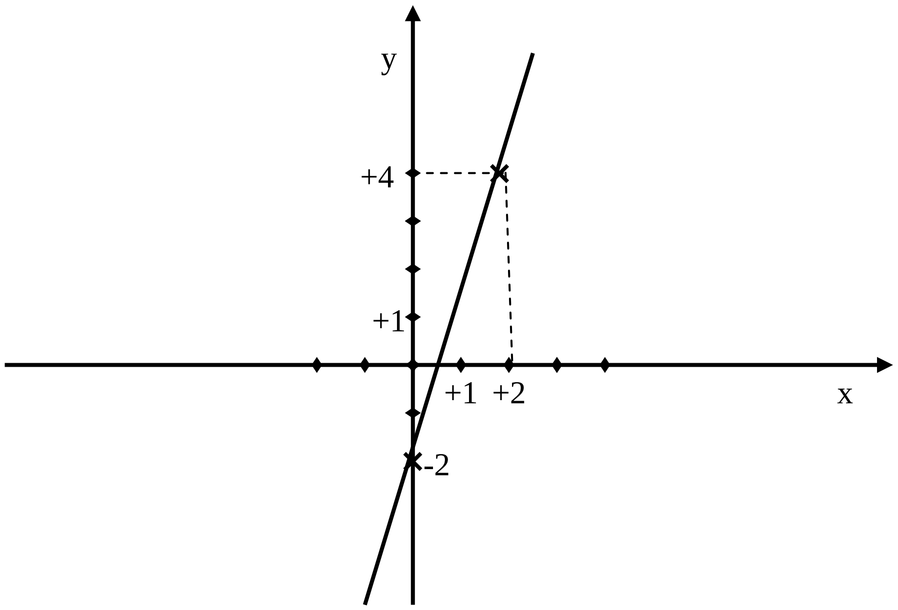
198. Lineáris függvény ábrázolása grafikonon táblázat segítségével

Az $f(x) = a*x + b$ $a, b \in R$ képlettel megadott valós függvények képe mindig egyenes. Az egyenest két pontja meghatározza. A képlet felhasználásával készítsünk olyan táblázatot, ami a függvény két elempárját tartalmazza. A két elempárhoz tartozó két pont egyértelműen meghatározza a lineáris függvény grafikonját.

Példa: Ábrázoljuk a g: $x \mapsto 3x - 2$ képlettel megadott lineáris függvényt. Készítsük el a táblázatot!

x	0	2
3x – 2	-2	4

Ábrázoljuk a két elempárhoz tartozó pontokat, majd rajzoljuk meg a két pont által meghatározott egyenest!



A g: $x \mapsto 3x - 2$ képlettel megadott lineáris függvény grafikonja.

199. Lineáris függvény ábrázolása grafikonon táblázat nélkül

Az $f(x) = a*x + b$

képletben a **b** értéke megmutatja, hogy hol metszi a lineáris függvény grafikonja az y tengelyt.

Példa: $f(x) = 2*x + \mathbf{1}$ függvény az y tengelyt a +1-nél metszi.

$g(x) = -3*x + \mathbf{5}$ függvény az y tengelyt a +5-nél metszi.

$e(x) = 4*x - 3$ vagy más alakban: $[e(x) = 4*x + (\mathbf{-3})]$ függvény az y tengelyt a -3-nál metszi.

Az $f(x) = a*x + b$

képletben **a**-t a függvény **meredekség**ének (iránytényezőjének) nevezzük. A meredekség a függvény egyenese és az x tengely pozitív fele által bezárt szöget jellemzi.

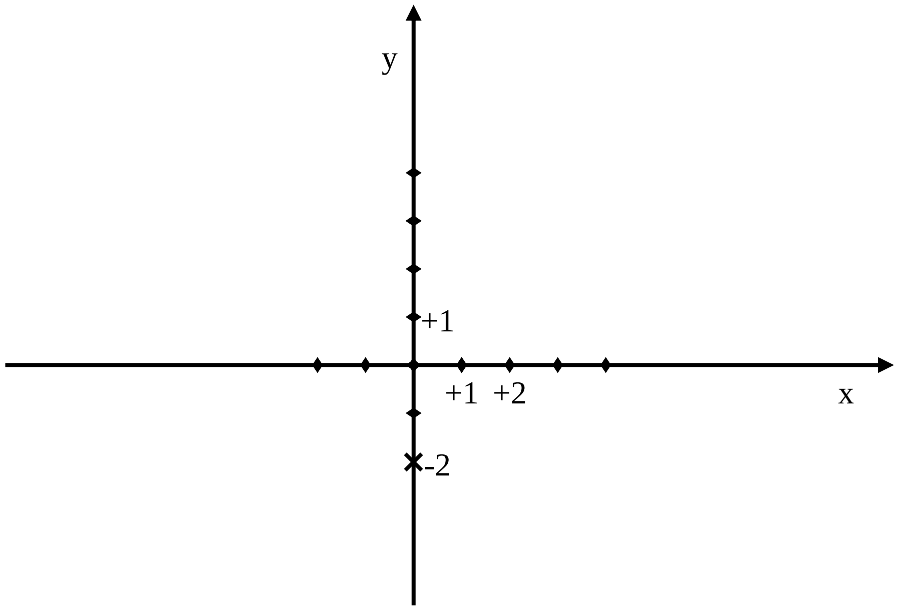
Ha **a**-t $\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}}$ alakban adjuk meg, — $c, d \in Z$, $d \neq 0$ — akkor az **a** értéke megmutatja, hogy a függvény grafikonjának egy ismert pontjából **d** egységet jobbra lépve az x tengellyel párhuzamosan, hány egységet kell y tengellyel párhuzamosan felfelé (ha $c > 0$), vagy lefelé (ha $c < 0$) lépni, hogy eljussunk a grafikon egy másik pontjába.
Két lineáris függvény grafikonja akkor, és csak akkor párhuzamos egymással, ha meredekségük megegyezik.

Példa: f(x) = **2***x + 1 g(x) = **2***x + **5** h(x) = **2***x -4 függvények grafikonjai egymással párhuzamos egyenesek, mert mindhárom meredeksége 2.

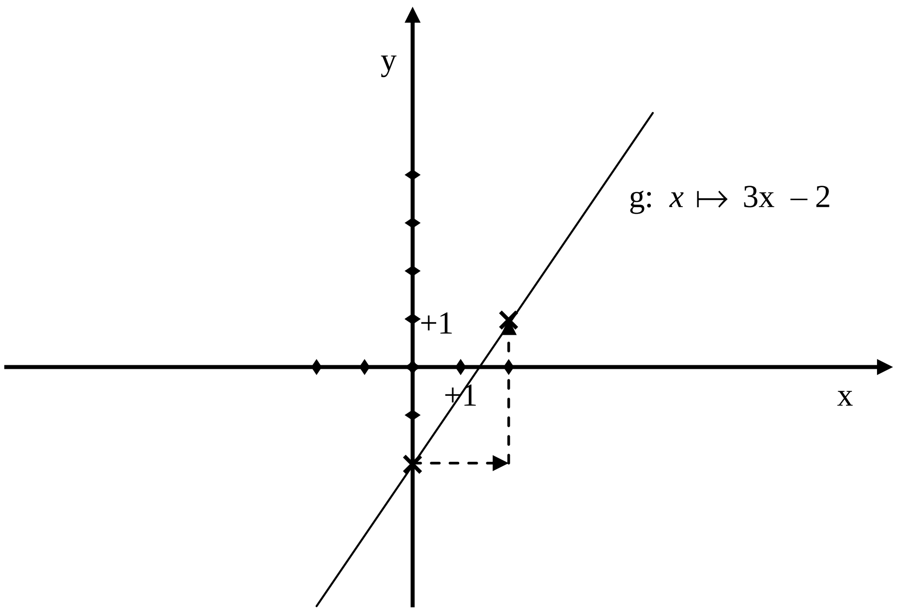
A k(x)= 4*x + 5 függvény meredeksége viszont 4, így képe nem párhuzamos az f, g, h függvények képével.

Példa: 1.Ábrázoljuk a g: $x \mapsto 3x - 2$ képlettel megadott lineáris függvényt táblázat nélkül.

A b értéke -2, tehát a függvény egyenese az y tengelyt a -2-nél metszi. A grafikonnak egy pontja, a (0;-2) pont tehát ismert.



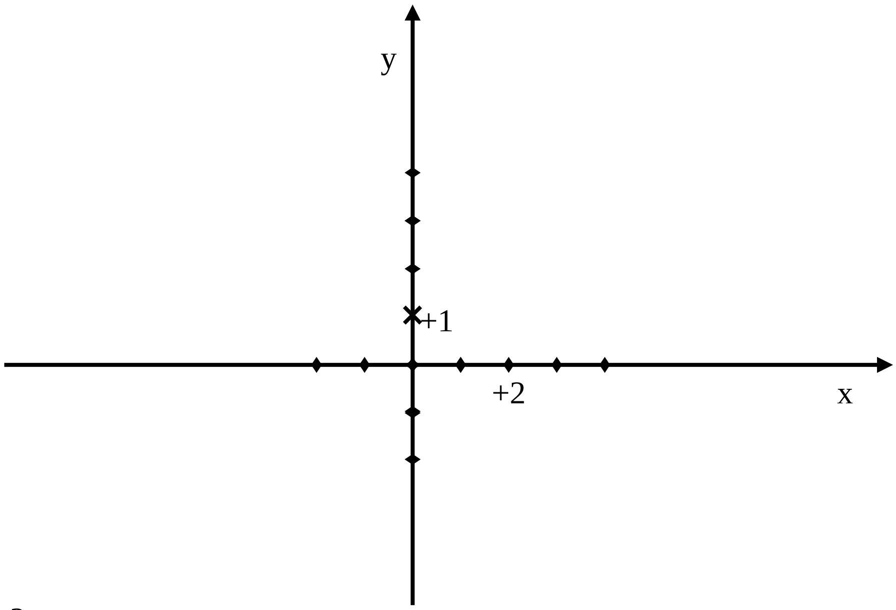
A képletben a = 3 értékét adjuk meg $\frac{c}{d}$ tört alakban a = $\frac{3}{1}$. A d = 1 mutatja meg, hogy 1 egységet kell jobbra lépni, majd a c = 3 miatt 3 egységet fölfelé haladva a grafikonnak egy újabb pontjához jutunk. A két pont egyértelműen meghatározza a grafikon egyenesét.



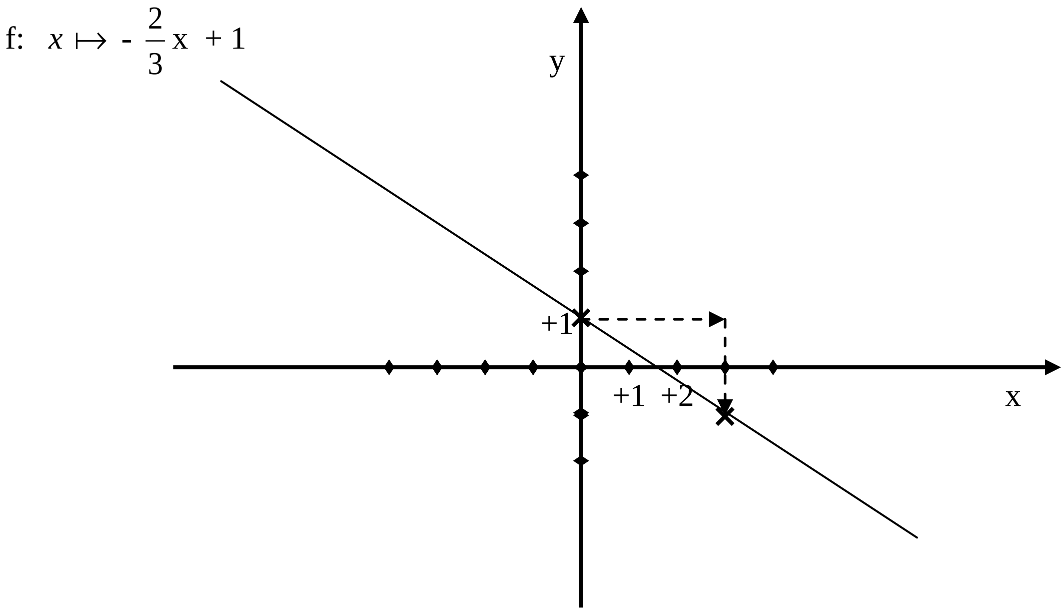
2. Ábrázoljuk a

f: $x \mapsto -\frac{2}{3}x + 1$ képlettel megadott lineáris függvényt táblázat nélkül!

A b értéke +1, tehát a függvény egyenese az y tengelyt a +1-nél metszi. A grafikonnak egy pontja, a (0;+1) pont tehát ismert.



A képletben a = $\frac{-2}{3}$ tört alakú. A d = 3 mutatja meg, hogy 3 egységet kell jobbra lépni, majd a c = -2 miatt 2 egységet lefelé haladva a grafikonnak egy újabb pontjához jutunk. A két pont egyértelműen meghatározza a grafikon egyenesét.



200. Abszolút érték függvény

<u>Az abszolútérték-függvény:</u>

Rendeljük hozzá minden számhoz az abszolút értékét!

$R \to R$

$x \mapsto |x|$

(Az abszolút érték függvény képlete $x \mapsto a*|b*x + c|+ d$ alakú.

$a, b, c, d \in R$

Mi csak olyan függvényeket vizsgálunk, ahol $b = 1$.

$x \mapsto a*|x + c|+ d$)

Az abszolút érték függvény grafikonja mindig $\bigvee$ alakú

Példa:

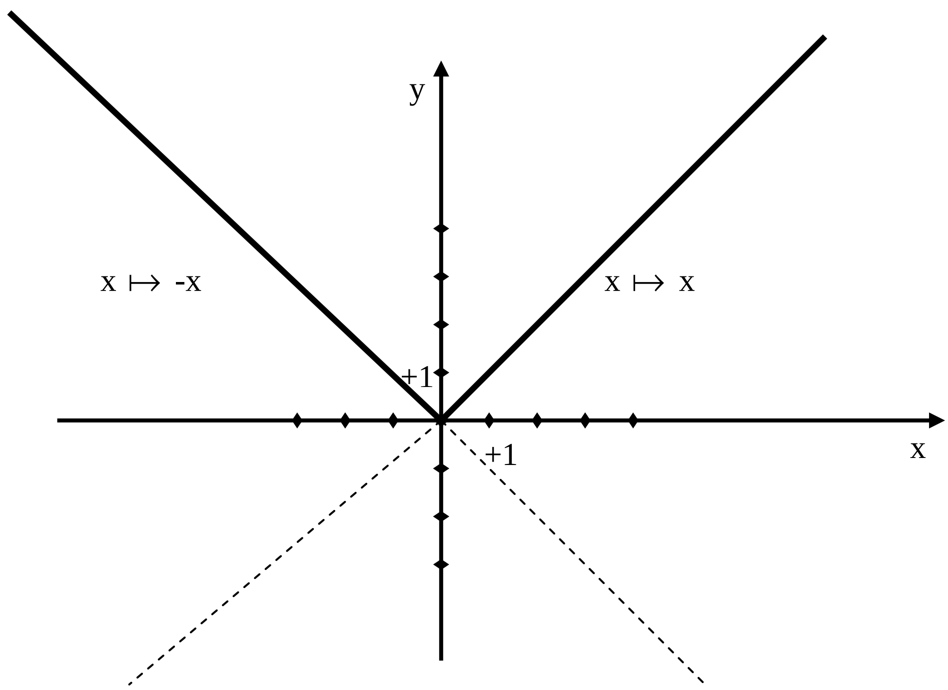
Ábrázoljuk a

g: $x \mapsto |x|$ képlettel megadott abszolútérték-függvényt!

Az abszolút-érték definíciója szerint:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{ha } x < 0; \\ x, & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

Ezért az abszolút érték grafikonja a negatív számokra ugyanaz, mint az $x \mapsto -x$ függvény grafikonja, a nemnegatív számokra ugyanaz, mint az $x \mapsto x$ függvény grafikonja.



$x \mapsto |x|$

201. Másodfokú függvény

Másodfokú függvény:

Rendeljük hozzá minden valós számhoz a négyzetét!

$R \to R$

$x \mapsto x^2$

A másodfokú függvény a nevét onnan kapta, hogy a képletben az x legnagyobb kitevője 2 (x^2).

A másodfokú függvény grafikonja parabola.

A másodfokú függvény képlete $x \mapsto ax^2 + bx + c$ alakú.

$a, b, c \in R,\ a \neq 0.$

A másodfokú függvény ábrázolásához az $y = ax^2 + bx + c$ képletet célszerű **$y = a(x - u)^2 + v$** alakra hozni. Ebből leolvashatók a parabola csúcspontjának a koordinátái: (u;v).

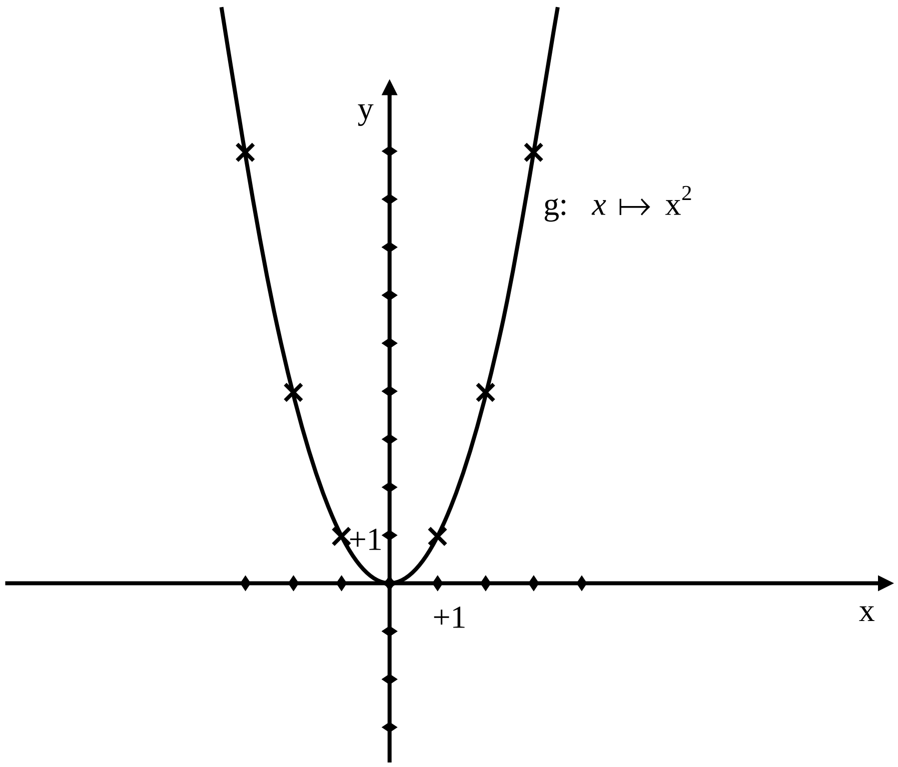
Példa:

Ábrázoljuk a

g: $x \mapsto x^2$

képlettel megadott másodfokú függvényt táblázat segítségével!

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9



A másodfokú függvény grafikonja **parabola**.

202. Négyzetgyök függvény

Négyzetgyök függvény:

Rendeljük hozzá minden nemnegatív valós számhoz a négyzetgyökét!

$$(R \setminus R^{-}) \to R$$

$$x \mapsto \sqrt{x}$$

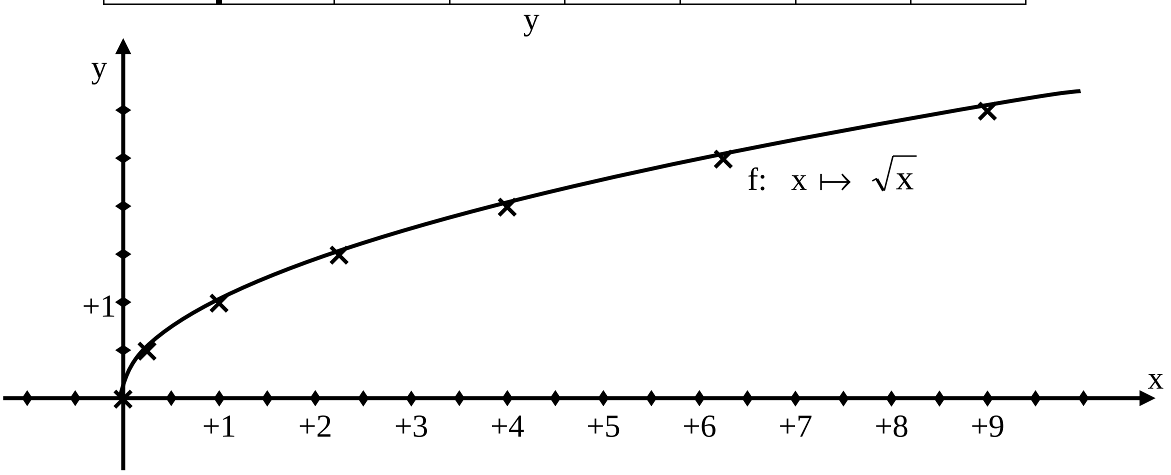
A négyzetgyök függvény grafikonja parabolaív.

Példa: Ábrázoljuk az

$$f:\ x \mapsto \sqrt{x}$$

képlettel megadott négyzetgyök függvényt táblázat segítségével!

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9
$\sqrt{x}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3



203. Fordított arányosság függvény

Fordított arányosság függvény:

$$(R \setminus \{0\}) \to R$$

$$x \mapsto \frac{a}{x} \qquad a \in R,\ a \neq 0$$

A fordított arányosság függvény grafikonja hiperbola.

Az $y = \frac{a}{x}$ *képletből a-t kifejezve:*

$$a = x*y$$

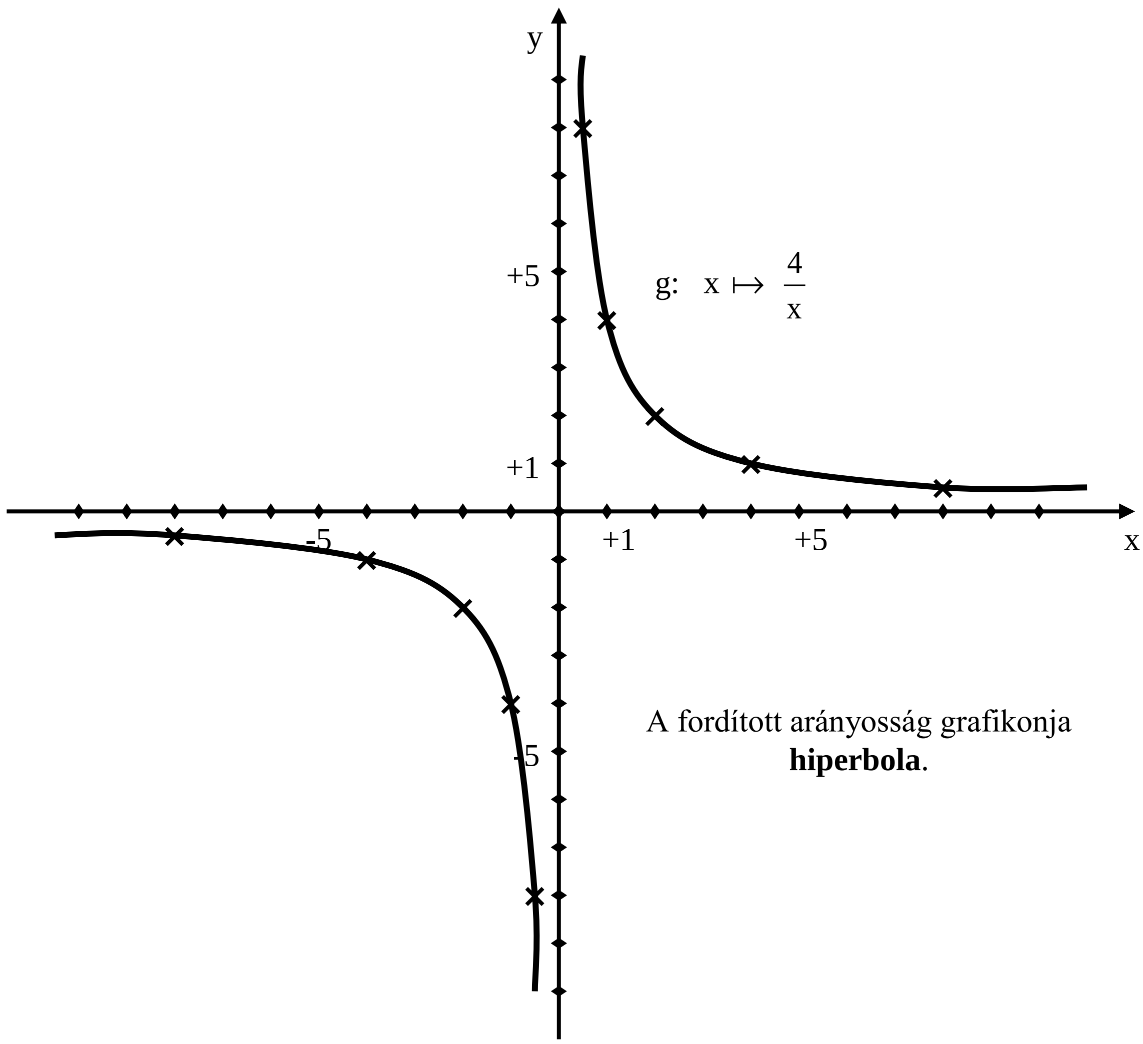
látható, hogy az összetartozó értékek szorzata állandó

Példa: Ábrázoljuk a

$$g:\ x \mapsto \frac{4}{x}$$

képlettel megadott fordított arányosság függvényt táblázat segítségével!

x	-8	-6	-4	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	4	6	8
$\frac{4}{x}$	-0,5	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1	$\frac{2}{3}$	0,5



A fordított arányosság grafikonja **hiperbola**.

204. Eltolás az x tengellyel párhuzamosan

$f(x) = \lvert\mathbf{x}\rvert$	$f(x) = \mathbf{x}^2$	$f(x) = \sqrt{\mathbf{x}}$
$f_1(x) = \lvert\mathbf{x} + c\rvert$	$f_1(x) = (\mathbf{x} + c)^2$	$f_1(x) = \sqrt{\mathbf{x} + c}$

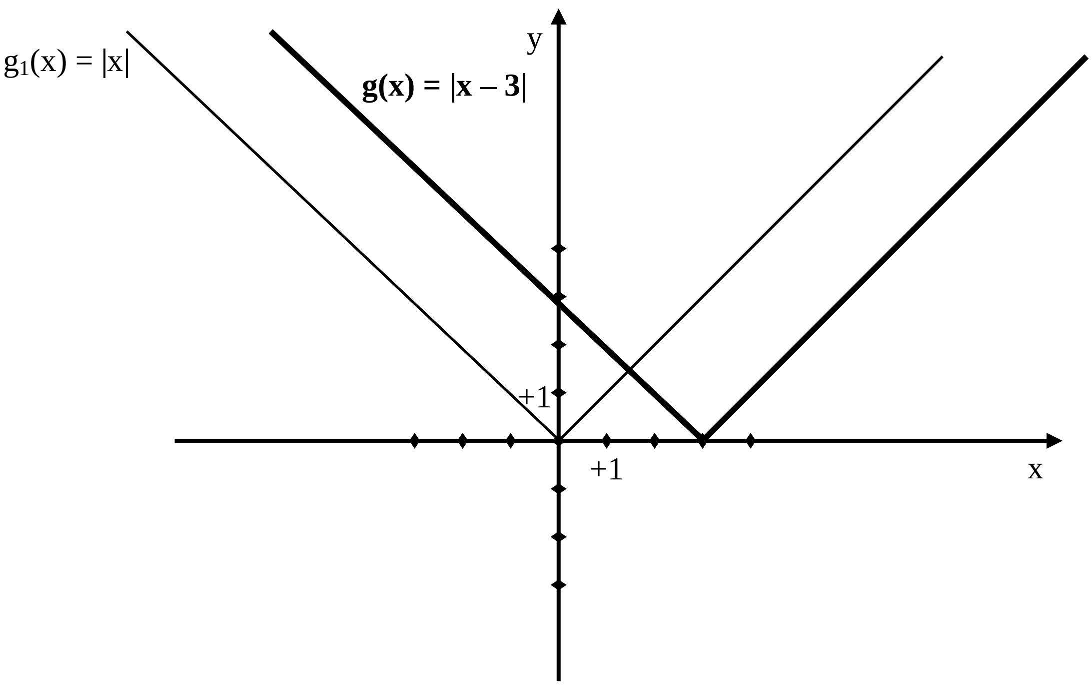
Ha az f(x) képlettel adott függvény független változójához (x-hez) pozitív c számot (c>0) adunk, akkor az f(x) függvény grafikonját az x tengely mentén negatív irányban c egységgel eltolva kapjuk az f(x+c) képlettel adott függvény grafikonját.

Ha az f(x) képlettel adott függvény független változójához (x-hez) negatív c számot (c<0) adunk, akkor az f(x) függvény grafikonját az x tengely mentén pozitív irányban c egységgel eltolva kapjuk az f(x+c) képlettel adott függvény grafikonját.

Példa:

Ábrázoljuk a
g: $x \mapsto |x - 3|$ képlettel megadott abszolútérték-függvényt!

$g_1(x) = |x|$
$g(x) = |x - 3|$ $\quad$ $g(x) = |x + (-3)|$ $\quad$ **c < 0**:



205. Eltolás az y tengellyel párhuzamosan

$f(x) = \|\mathbf{x}\|$	$f(x) = \mathbf{x}^2$	$f(x) = \sqrt{\mathbf{x}}$
$f_1(x) = \|\mathbf{x}\| + b$	$f_1(x) = \mathbf{x}^2 + b$	$f_1(x) = \sqrt{\mathbf{x}} + b$

Ha az f(x) képlettel adott függvény függvényértékéhez [f(x)-hez] pozitív b számot (b>0) adunk, akkor az f(x) függvény grafikonját az y tengely mentén pozitív irányban b egységgel eltolva kapjuk az f(x)+b képlettel adott függvény grafikonját.

Ha az f(x) képlettel adott függvény függvényértékéhez [f(x)-hez] negatív b számot (b<0) adunk, akkor az f(x) függvény grafikonját az y tengely mentén negatív irányban b egységgel eltolva kapjuk az f(x)+b képlettel adott függvény grafikonját.

Példa:

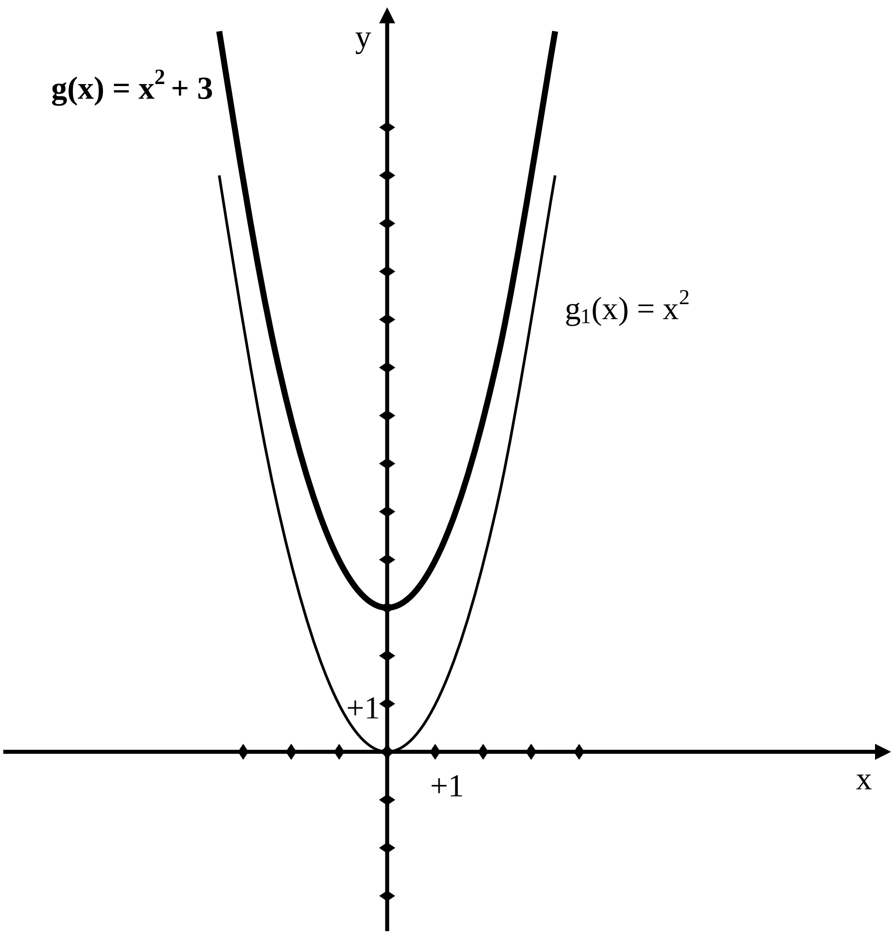
Ábrázoljuk a

g: $x \mapsto x^2 + 3$

képlettel megadott másodfokú függvényt!

$g_1(x) = x^2$

$g(x) = x^2 + 3$ **b > 0:** $\uparrow$



206. Nyújtás, zsugorítás az y tengely irányában

$f(x) = \|\mathbf{x}\|$	$f(x) = \mathbf{x}^2$	$f(x) = \sqrt{\mathbf{x}}$
$f_1(x) = a\|\mathbf{x}\|$	$f_1(x) = a\mathbf{x}^2$	$f_1(x) = a\sqrt{\mathbf{x}}$

Ha az f(x) képlettel adott függvény függvényértékét **a** > **1** számmal szorozzuk, akkor az f(x) függvény grafikonját az y tengely irányában a-szorosára nyújtva kapjuk az a*f(x) képlettel adott függvény grafikonját.

Ha az f(x) képlettel adott függvény függvényértékét **0** < **a** < **1** számmal szorozzuk, akkor az f(x) függvény grafikonját az y tengely irányban a-szorosára zsugorítva kapjuk az a*f(x) képlettel adott függvény grafikonját.

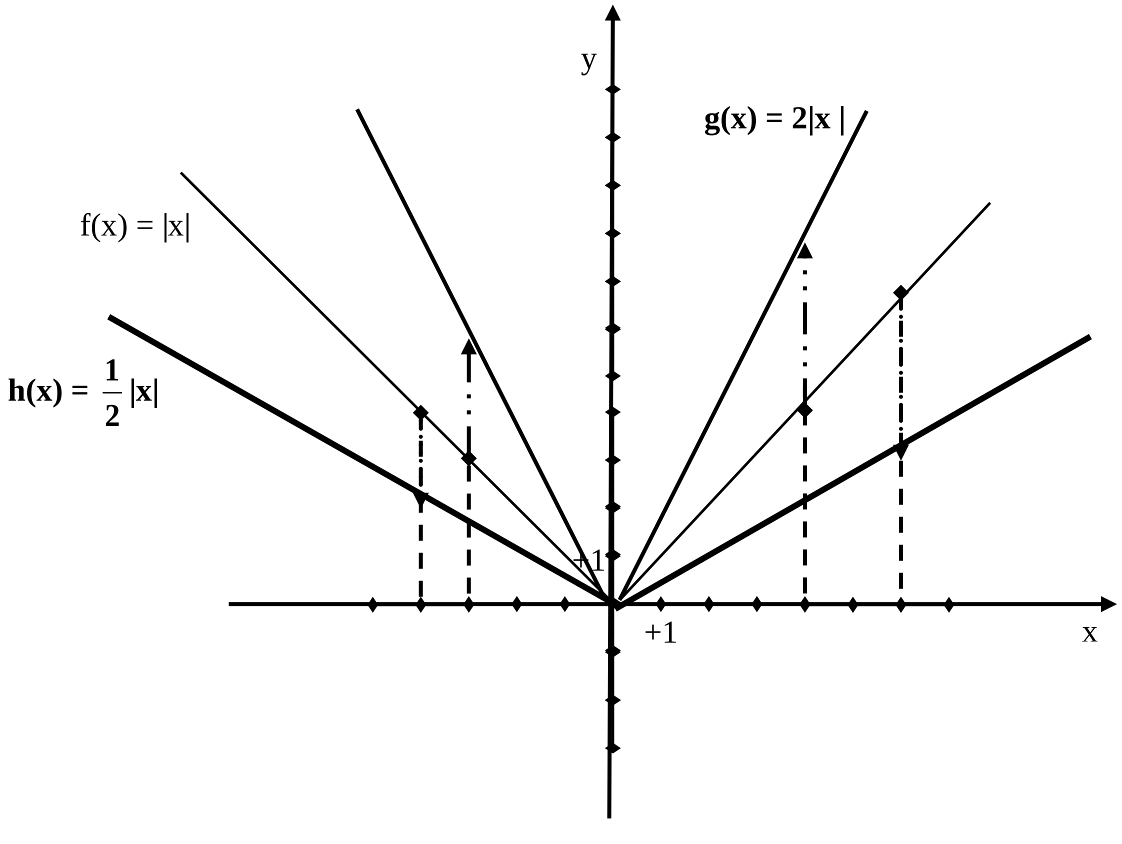
Példa:

Ábrázoljuk a

g: $x \mapsto 2|x|$ és a h: $x \mapsto \frac{1}{2}|x|$ képlettel megadott abszolútérték-függvényeket!

$f(x) = |x|$ $\qquad$ $f(x) = |x|$

$g(x) = 2|x|$ $\qquad$ **a** > **1:** *nyújtás* $\qquad$ $h(x) = \frac{1}{2}|x|$ $\qquad$ **0** < **a** < **1:** *zsugorítás*



Az ***f*** függvény minden függvényértéke a kétszeresére nő a ***g*** (*felére csökken a* ***h***) függvénynél. A csúcs a helyén marad, hisz 2-szer 0 (*$\frac{1}{2}$-szer 0*) is 0.

Annyi függvényértéknek vesszük a kétszeresét, (*felét*) amennyi már elegendő a grafikon megrajzolásához. Abszolútérték–függvény esetén elég mindkét száron egy-egy ponthoz tartozó függvényérték kétszeresét (*felét*) venni.

207. Tükrözés az x tengelyre

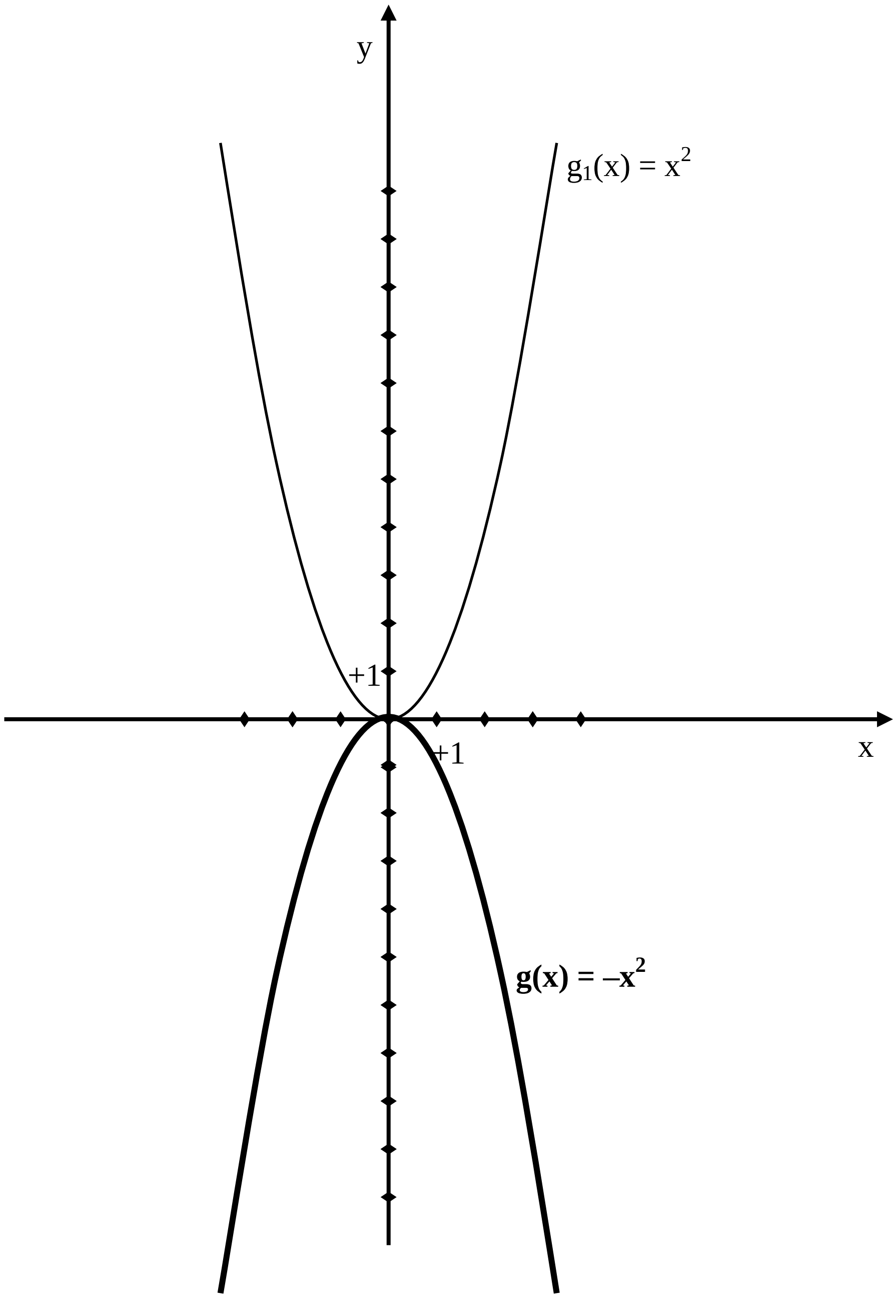
$f(x) = \|\mathbf{x}\|$	$f(x) = \mathbf{x^2}$	$f(x) = \sqrt{\mathbf{x}}$
$f_1(x) = -\|\mathbf{x}\|$	$f_1(x) = -\mathbf{x^2}$	$f_1(x) = -\sqrt{\mathbf{x}}$

A $-f(x)$ képlettel adott függvény grafikonja az $f(x)$ képlettel adott függvény grafikonjának az x tengelyre vonatkozó tükörképe.

Példa:

Ábrázoljuk a
g: $x \mapsto -x^2$
képlettel megadott másodfokú függvényt!

$g_1(x) = x^2$
$g(x) = -x^2$



Példa: Ábrázoljuk a

$$g:\ \ x \mapsto -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$$

képlettel megadott másodfokú függvényt függvénytranszformációval!

$$g_1(x) = x^2$$

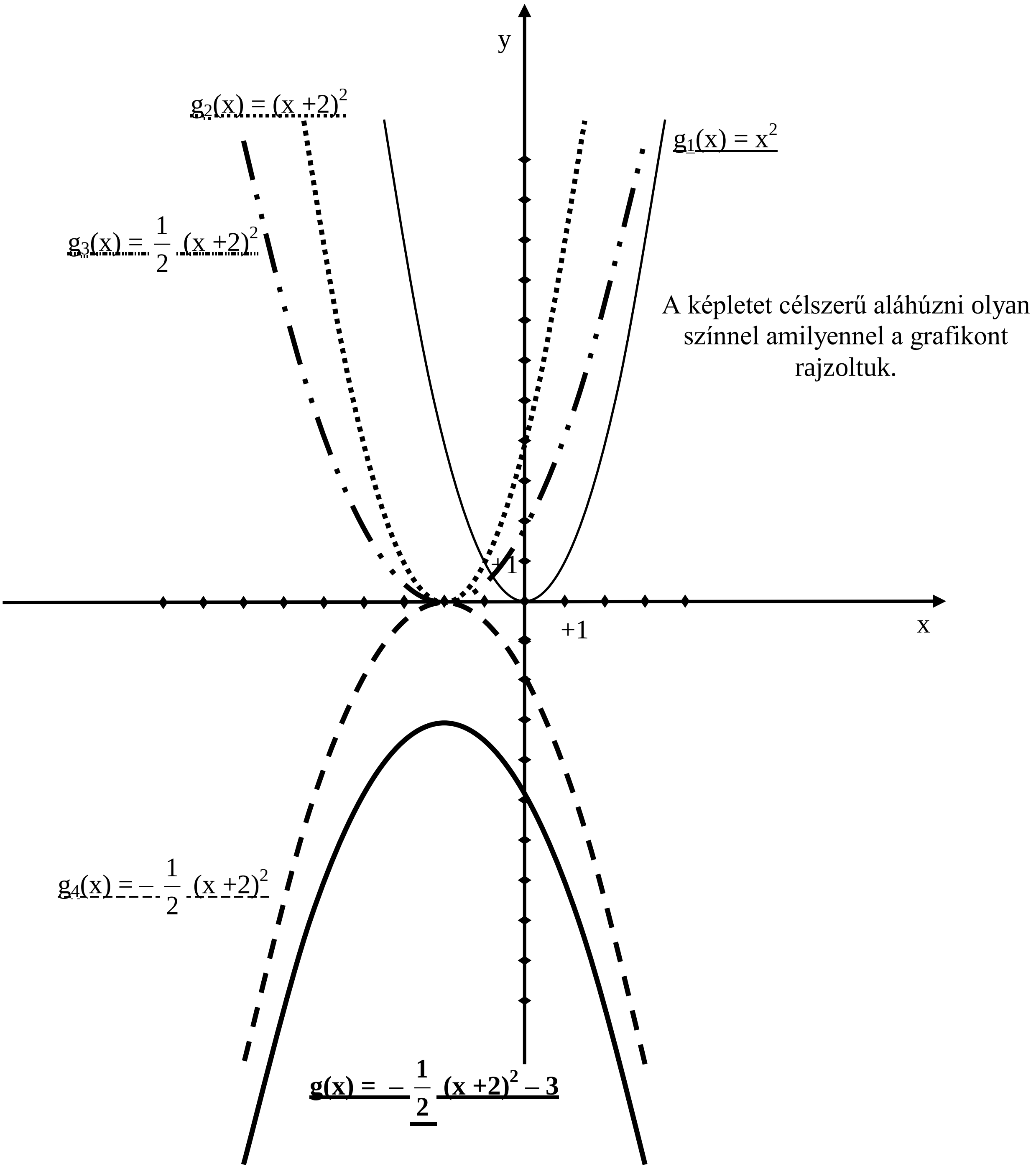
$$g_2(x) = (x+2)^2$$

$$g_3(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2$$

$$g_4(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2$$

$$g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$$

A kiindulási függvényből a műveleti sorrend szabályait figyelembe véve jutunk el az ábrázolandó függvény képletéhez.



208. A függvény monotonitásának meghatározása

Az ***f*** függvény **monoton növekvő** az értelmezési tartomány valamely H részhalmazán, ha a H halmaz bármely két (x_1, x_2) elemére teljesül:

ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(Növekvő független változókhoz növekvő függvényértékek tartoznak.)

Az ***f*** függvény **monoton csökkenő** az értelmezési tartomány valamely H részhalmazán, ha a H halmaz bármely két (x_1, x_2) elemére teljesül:

ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geq f(x_2)$.

(Növekvő független változókhoz csökkenő függvényértékek tartoznak.)

Lineáris függvénynél az f(x) = a*x + b
képletben az **a** értékéből következtethetünk a függvény monotonitására:
Ha az f(x) = a*x + b képletben a >0, akkor a függvény monoton növekvő.
Ha az f(x) = a*x + b képletben a = 0, akkor a függvény konstans.
Ha az f(x) = a*x + b képletben a <0, akkor a függvény monoton csökkenő.
A monoton növekvő, monoton csökkenő függvény fogalmát a függvényvizsgálatnál definiáljuk.

209. Intervallum fogalma

Intervallum: a számegyenes egy szakasza. Két végpontja közötti számok halmaza. A végpontjaihoz tartozó számokról nevezzük el.

Pl.:

[4; 9] intervallum
[-7; 2,6] intervallum
[a; b] intervallum
} Zárt intervallumok. A végpontok is beletartoznak a számhalmazba. (Zártságát a zárójelek jelzik:[ ])

]-4; 3[intervallum
]4,7; 18[intervallum
} Nyitott intervallumok. A végpontok nem tartoznak bele a számhalmazba. (Zártságát a zárójelek jelzik:] [ )

210. Függvény maximumhelye, maximuma, minimumhelye, minimuma, a szélsőérték fogalma, a függvény zérushelye

Az ***f*** függvény értelmezési tartományának x_0 pontja **maximumhely**, ha a hozzá tartozó függvényérték, ***f***(x_0) az értékkészlet legnagyobb eleme. Az ***f***(x_0) értéket a függvény **maximum**ának nevezzük.

Minden $x \in ÉT_f$ esetén $f(x) < f(x_0)$

Az ***f*** függvény értelmezési tartományának x_0 pontja **minimumhely**, ha a hozzá tartozó függvényérték, ***f***(x_0) az értékkészlet legkisebb eleme. Az ***f***(x_0) értéket a függvény **minimum**ának nevezzük.

Minden $x \in ÉT_f$ esetén $f(x) > f(x_0)$

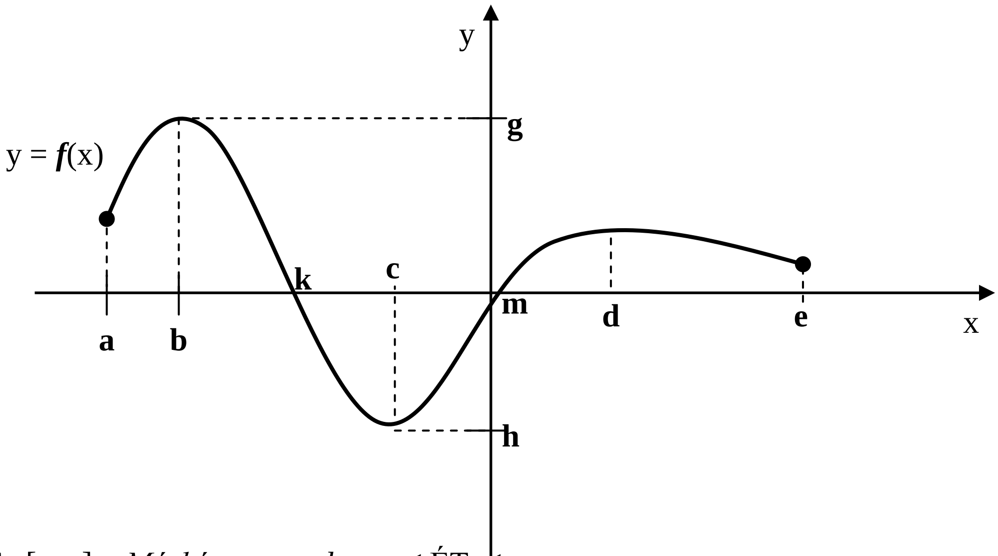
A függvény maximumát és minimumát közös néven a függvény **szélsőérték**einek nevezzük.

Az ***f*** függvény értelmezési tartományának x_0 pontja **zérushely**, ha a hozzá tartozó függvényérték 0, f(x) = 0. Ebben a pontban metszi, vagy érinti a függvény grafikonja az x tengelyt

211. A függvényvizsgálat lépései az általános iskolában:

1. A függvény értelmezési tartományának meghatározása. ÉT (Ha nincs megadva.)
2. A függvény értékkészletének meghatározása. ÉK
3. A függvény zérushelyeinek meghatározása.
4. A függvény monotonitásának vizsgálata.
   Monoton növekvő: az intervallumok megadása.
   Monoton csökkenő: az intervallumok megadása.
5. Szélsőértékek meghatározása:
   Maximumhely, maximum.
   Minimumhely, minimum.

Példa: Vizsgáljuk a grafikonjával adott ***f*** függvényt a megadott szempontok szerint!



1. $ÉT_f$: [a; e] *Másképp megadva:* $a \le ÉT_f \le e$
2. $ÉK_f$: [h; g] *Másképp megadva:* $h \le ÉK_f \le g$
3. Zérushely: x = k, x = m
4.
   a. A függvény monoton növekvő: [a; b] [h; d]
   b. A függvény monoton csökkenő: [b; h] [d; e]
5.
   a. Maximumhely: x = b, maximum: f(b) = g
   b. Minimumhely: x = c, minimum: f(c) = h

212. Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldása

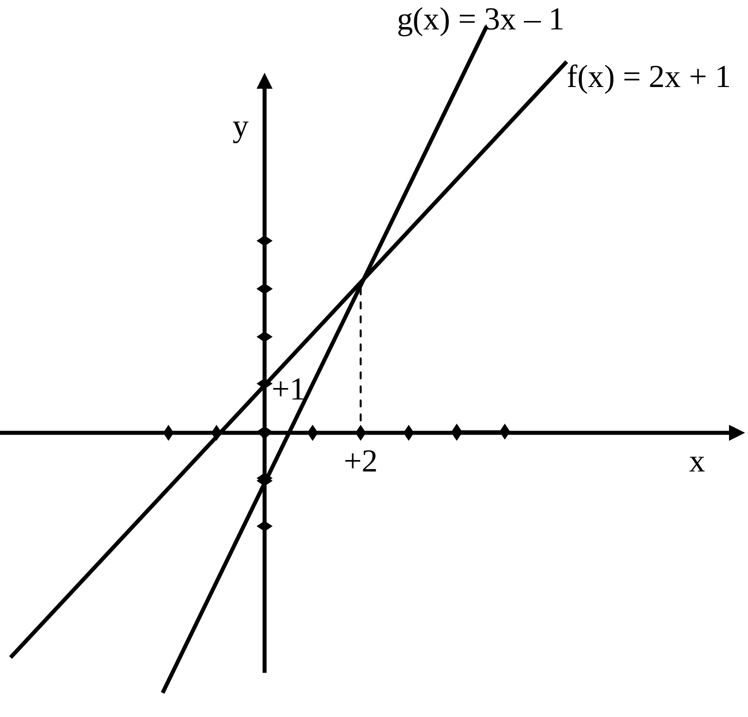
Egyenletek, egyenlőtlenségek grafikus megoldásakor az egyenlet, egyenlőtlenség két oldalát két, képlettel megadott függvényként kezeljük. A megoldás során az alaphalmaznak azokat az elemeit keressük, amelyeket a két képletbe helyettesítve teljesül az így kapott függvényértékekre az egyenlőség, illetve az egyenlőtlenség. A keresést a függvények grafikus ábrázolásával végezzük.

Példa: **1.** Oldjuk meg grafikusan a következő egyenletet! $2x + 1 = 3x - 1$

A baloldal: $f(x) = 2x + 1$ — egy elsőfokú, lineáris függvény képlete

A jobboldal: $g(x) = 3x - 1$ — egy elsőfokú, lineáris függvény képlete

Az alaphalmaznak azt az x elemét keressük, amelynek a képe mindkét függvény esetében ugyanaz a szám. Ábrázoljuk a két függvényt közös koordináta-rendszerben!



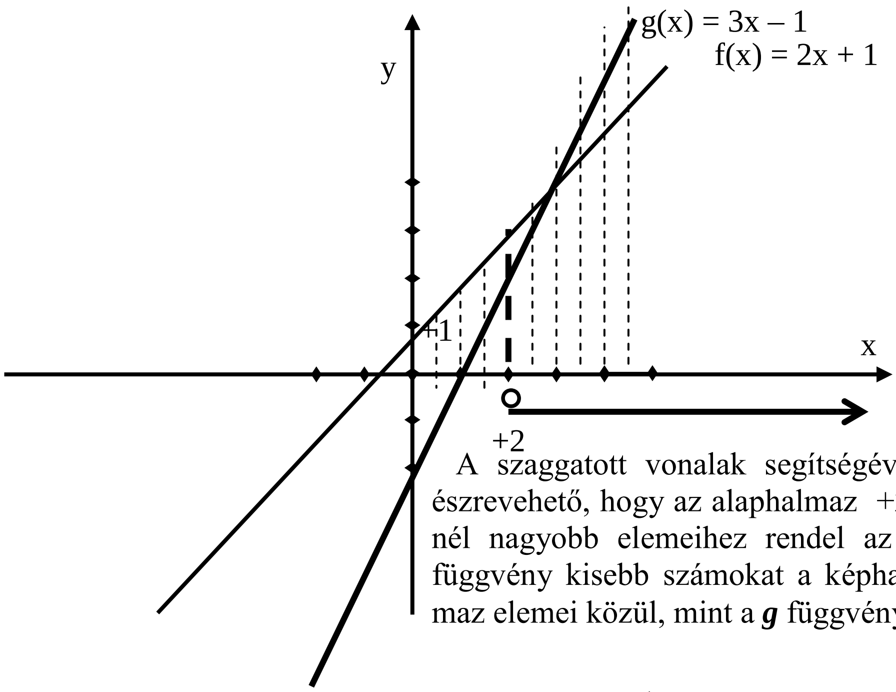
A grafikonról leolvasható, hogy az alaphalmaz $x = 2$ értékéhez mindkét függvény ugyanazt a függvényértéket rendeli.

Az egyenlet megoldása:

x = 2

2. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget! $2x + 1 < 3x - 1$

Ezúttal az alaphalmaznak azokat az elemeit keressük, amelyekhez az $f(x)$ képlettel megadott függvény kisebb függvényértékeket rendel, mint a $g(x)$ képlettel megadott függvény.

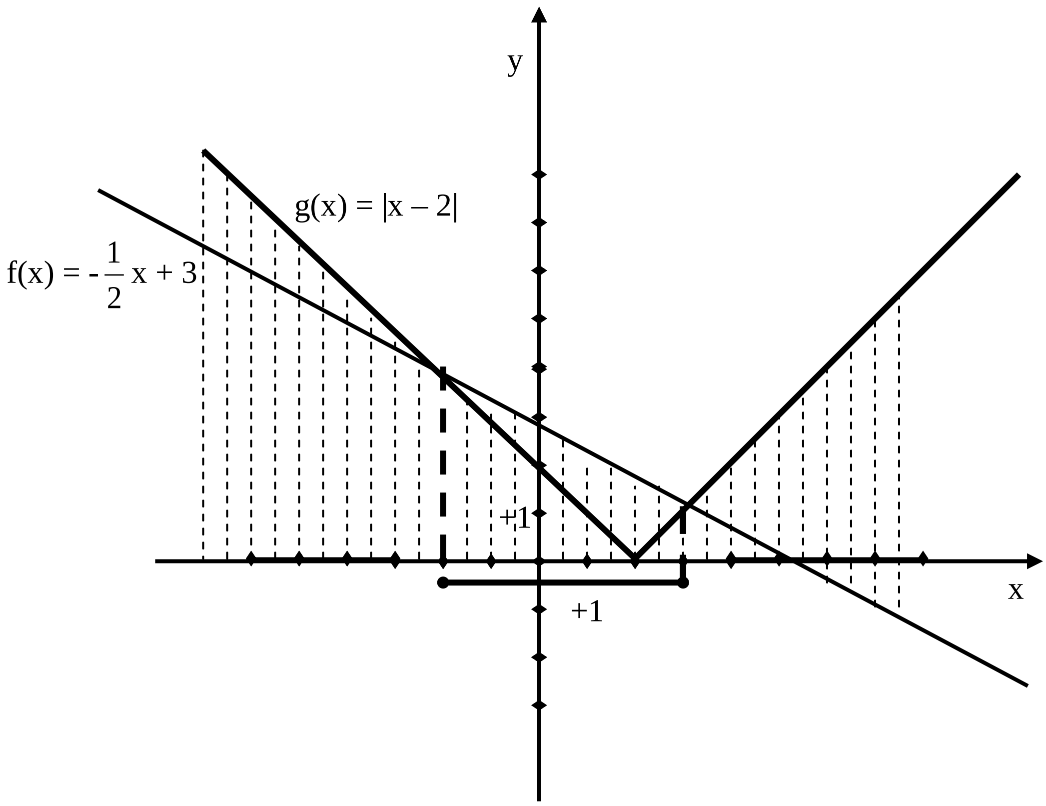


A szaggatott vonalak segítségével észrevehető, hogy az alaphalmaz +2-nél nagyobb elemeihez rendel az ***f*** függvény kisebb számokat a képhalmaz elemei közül, mint a ***g*** függvény.

3. Oldjuk meg grafikusan a következő egyenlőtlenséget! $-\frac{1}{2}x + 3 \geq |x - 2|$

A baloldal: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ — egy elsőfokú, lineáris függvény képlete

A jobboldal: $g(x) = |x - 2|$ — egy abszolút érték függvény képlete



A grafikonokról leolvasható, hogy az ***f*** függvény az alaphalmaz -2-nél nem kisebb, de +3,3–nél nem nagyobb értékeihez rendel nagyobb, vagy ugyanakkora függvényértékeket, mint a ***g*** függvény.

$$-2 \leq x \leq 3{,}3$$

Ezek csak közelítő értékek, mert a grafikonos megoldás hátránya a pontatlanság, most is tapasztalható. Általában olyan egyenletek megoldásánál használjuk a grafikus megoldást, amelyeket algebrai úton nem tudunk megoldani.

213. Számsorozat fogalma, megadása

Számsorozat: olyan szám-szám függvény, amelynek értelmezési tartomány a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete pedig valamely nem üres számhalmaz.

Példa:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**........................**	**26**	**.......................**
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓		↓	
-5	**0**	**5**	**10**	**15**	**20**	**25**	**30**	**.......................**	**120**	**......................**

A számsorozat első eleme: $a_1 = -5$

második eleme: $a_2 = 0$

$a_3 = 5$

$a_4 = 10$

$a_5 = 15$

.

.

n-edik (tetszőleges) eleme: $a_n = ?$

A számsorozat megadása:

1. Megadjuk a sorozat valamelyik elemét, és a rákövetkezés szabályát.

Példa: Határozzuk meg annak a számsorozatnak a negyedik és hatodik tagját, amelyről tudjuk, hogy ötödik eleme: $\mathbf{a_5 = 8}$, és a rákövetkezés szabálya: $\mathbf{a_{n+1} = 2a_n - 1}$

$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ a_7 \ldots\ldots$

Ennél a megadási módnál mindig az ismert tag szomszédai számolhatók ki. Mivel az ötödik tag ismert, a negyedik és hatodik tag is közvetlenül számolható a képletbe való behelyettesítéssel.

$a_5 = 8$ $\quad a_{n+1} = 2a_n - 1$ $\quad a_4 = ?$ $\quad a_6 = ?$

$$a_6 = 2a_5 - 1$$
$$a_6 = 2*8 - 1$$
$$\underline{\underline{\mathbf{a_6 = 15}}}$$

$$a_5 = 2a_4 - 1$$
$$8 = 2a_4 - 1 \quad // +1$$
$$9 = 2a_4 \quad // :2$$
$$\underline{\underline{\mathbf{4{,}5 = a_4}}}$$

Ezután már a harmadik és hetedik tag is közvetlenül számolható.

2. A tag sorszámának a segítségével adjuk meg a tagot.

Példa: Határozzuk meg annak a számsorozatnak a hetedik és huszadik tagját, amelynek tetszőleges (n-edik) tagját az $\mathbf{a_n = 3n - 9}$ képlet határozza meg! (n az elem sorszáma) $\quad a_7 = ?$ $\quad a_{20} = ?$

$$a_n = 3n - 9$$
$$a_7 = 3*7 - 9$$
$$\underline{\underline{\mathbf{a_7 = 12}}}$$

$$a_n = 3n - 9$$
$$a_{20} = 3*20 - 9$$
$$\underline{\underline{\mathbf{a_{20} = 51}}}$$

3. Szöveges szabállyal adjuk meg a sorozatot.

Példa:

A sorozat első 100 eleme -5, a többi +3.

214. Különbségsorozat, hányadossorozat, növekvő számsorozat, csökkenő számsorozat, konstans számsorozat

Különbségsorozat: Ha egy számsorozat minden tagjából kivonjuk az előtte lévő tagot, a kapott különbségek a sorozat különbségsorozatát alkotják.
Hányadossorozat: Ha egy — 0-t nem tartalmazó — számsorozat minden tagját osztjuk az előtte lévő taggal, a kapott hányadosok a sorozat hányadossorozatát alkotják.
Növekvő a számsorozat, ha különbségsorozata pozitív. (Bármely tagja nagyobb, mint a megelőző tag. $a_n < a_{n+1}$)
Csökkenő a számsorozat, ha különbségsorozata negatív. (Bármely tagja kisebb, mint a megelőző tag. $a_n > a_{n+1}$)
Konstans (állandó) a számsorozat, ha különbségsorozata nulla. A konstans sorozat minden tagja megegyezik. $a_n = a_{n+1}$

215. A számtani sorozat, a számtani sorozat tetszőleges elemének kiszámítása

Ha a számsorozat bármely tagjából a megelőző tagot kivonva a különbség állandó, akkor a sorozat **számtani sorozat**.
A különbség jele: d (*differencia: különbség latinul*)
(Másképp: Ha a számsorozat különbségsorozata állandó, akkor a sorozat számtani sorozat.)

A számtani sorozat növekvő, ha $d > 0$.
A számtani sorozat csökkenő, ha $d < 0$.
A számtani sorozat konstans (állandó), ha $d = 0$.

Ha a számtani sorozat adott tagjához hozzáadjuk a differenciát, akkor a rákövetkező, ha az adott tagjából kivonjuk a differenciát, akkor a megelőző tagot kapjuk.
A számtani sorozat tetszőleges, n-edik tagjának, első tagjának és különbségének kiszámítására használható képlet:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) * d}$$

Az első taghoz hozzáadjuk, a különbségnek a keresett tag sorszámánál 1-gyel kevesebbszeresét.

Példa:

Határozzuk meg a számtani sorozat első öt elemét, ha ismerjük a 15. tagot, és a különbséget!

$$a_{15} = 38$$
$$d = 3$$
$$a_1 = ?\quad a_2 = ?\quad a_3 = ?\quad a_4 = ?\quad a_5 = ?$$

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) * d}$$

$$a_{15} = a_1 + (15 - 1) * 3$$

$$38 = a_1 + (15 - 1) * 3$$

$$38 = a_1 + 42 \quad //-42$$

$$\mathbf{-4 = a_1}$$

$$a_1 = -4\quad a_2 = -1\quad a_3 = 2\quad a_4 = 5\quad a_5 = 8$$

216. A számtani sorozat első n tagjának összege

A számtani sorozat első n tagjának összege: S_n

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$$

Bizonyítás: Bizonyítandó: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$

A számtani sorozat első n tagjának összegét megkapom, ha az elsőtől az n-edikig valamennyi tagot összeadom. **I.** $\mathbf{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_{n-2} + a_n}$

A számtani sorozat első n tagjának összegét úgy is megkapom, ha az n-ediktől, az elsőig valamennyi tagot összeadom. A két összeg csak a tagok sorrendjében különbözik.

II. $\mathbf{S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_4 + a_3 + a_2 + a_1}$

Minden tag felírható az első tag és a különbség, és az n-edik tag és a különbség segítségével is, felhasználva, hogy ha a számtani sorozat adott tagjához hozzáadjuk a differenciát, akkor a rákövetkező, ha az adott tagjából kivonjuk a differenciát, akkor a megelőző tagot kapjuk.

I. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_{n-2} + a_n$

$$\textbf{I.}\quad S_n = a_1 + \overbrace{(a_1 + d)}^{a_2} + \overbrace{(a_1 + 2d)}^{a_3} + \ldots + \overbrace{[a_1 + (n-3)*d]}^{a_{n-1}} + \overbrace{[a_1 + (n-2)*d]}^{a_{n-2}} + \overbrace{[a_1 + (n-1)*d]}^{a_n}$$

$$\textbf{II.}\quad S_n = a_n + \underbrace{(a_n - d)}_{a_{n-1}} + \underbrace{(a_n - 2d)}_{a_{n-2}} + \ldots + \underbrace{[a_n - (n-3)*d]}_{a_3} + \underbrace{[a_n - (n-2)*d]}_{a_2} + \underbrace{[a_n - (n-1)*d]}_{a_1}$$

II. $S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1$

I. + II. A kettős nyíllal összekötött tagok összege $a_1 + a_n$. Mivel n darab ilyen tag van:

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) * n \qquad // :2$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$$ Pontosan a bizonyítandó állítást kaptuk.

Példa: Határozzuk meg a számtani sorozat első 10 elemének az összegét, ha

$$a_1 = 5 \qquad d = 2$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} * n$$

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} * 10$$

Ahhoz, hogy a képletet alkalmazni tudjuk, szükségünk van a 10. tagra.

$$a_n = a_1 + (n-1) * d$$

$$a_{10} = 5 + (10 - 1) * 2$$

$$\underline{a_{10} = 23}$$

$$S_{10} = \frac{5 + 23}{2} * 10$$

$$\underline{\mathbf{S_{10} = 140}}$$

217. A mértani sorozat, a mértani sorozat tetszőleges elemének kiszámítása

Ha egy — 0-t nem tartalmazó — számsorozat minden tagját osztjuk az előtte lévő taggal, és a hányados állandó, akkor a sorozat **mértani sorozat**. A hányados jele: q (*quotiens — kvóciens: hányados latinul*)
(Másképp: Ha a számsorozat hányadossorozata állandó, akkor a sorozat mértani sorozat.)
A mértani sorozat növekvő, ha $q > 1$ és $a_1 > 0$.
A mértani sorozat csökkenő, ha $0 < q < 1$ és $a_1 > 0$.
A mértani sorozat konstans (állandó), ha $q = 1$.

Ha a mértani sorozat adott tagját megszorozzuk a hányadossal, akkor a rákövetkező, ha az adott tagját elosztjuk a hányadossal, akkor a megelőző tagot kapjuk.
A mértani sorozat tetszőleges, n-edik tagjának, első tagjának és hányadosának kiszámítására használható képlet:

$$\mathbf{a_n = a_1 * q^{(n-1)}}$$

Az első tagot megszorozzuk a hányadosnak a keresett tag sorszámánál 1-gyel kisebb hatványával.

Példa: Határozzuk meg a mértani sorozat ötödik elemét, ha ismerjük az első tagot, és hányadost!

$a_1 = 6 \qquad q = 2 \qquad a_5 = ?$

$$\mathbf{a_n = a_1 * q^{(n-1)}}$$

$$a_5 = 6 * 2^{(5-1)}$$

$$a_5 = 6 * 2^4$$

$$\underline{\underline{\mathbf{a_5 = 96}}}$$

218. A mértani sorozat első n tagjának összege

A mértani sorozat első n tagjának összege: S_n

$$S_n = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad \text{ha } q \neq 1$$

$$S_n = a_1 * n \qquad \text{ha } q = 1$$

Bizonyítás: Bizonyítandó: $S_n = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Az első n tag összege:

1. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_{n-2} + a_n$

kifejezhető a sorozat első elemével, és hányadosával:

2. $S_n = a_1 + a_1 * q + a_1 * q^2 + \ldots + a_1 * q^{n-2} + a_1 * q^{n-1} \quad // *q \qquad q \neq 0$

3. $S_n * q = a_1 * q + a_1 * q^2 + a_1 * q^3 + \ldots + a_1 * q^{n-1} + a_1 * q^n$

A 3. és a 2. egyenlet különbségét véve:

$$S_n * q - S_n = a_1 * q^n - a_1$$

$$S_n * (q - 1) = a_1 * (q^n - 1) \qquad // : (q - 1) \quad \text{ha } q \neq 1$$

$$S_n = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Pontosan a bizonyítandó állítást kaptuk.

Példa: Határozzuk meg a mértani sorozat első 10 elemének az összegét, ha

$a_1 = 5 \qquad q = 3$

$$S_n = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_{10} = 5 * \frac{3^{10} - 1}{3 - 1}$$

$$S_{10} = 5 * \frac{59049 - 1}{2}$$

$\underline{S_{10} = 147620}$

219. Kamatoskamat-számítás

Ha több éven át azonos kamatláb mellett bankban tartjuk a pénzünket, akkor pénzünk használatáért kamatos kamatot fizet a bank. Vagyis év végén a kamatot hozzáadják a pénzünkhöz, és a következő évben már a kamat is kamatozik. Ha **p** a kamatláb, **a_0** a betett összeg akkor **n** év múlva

$$a_n = a_0 * \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

pénzt vehetünk fel.

Példa: 1. 50000 Ft-ot tettünk a bankba évi 8%-os kamatra. Hány Ft-ot kapunk kézhez 10 év múlva?

$$a_n = a_0 * \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

a_0=50000 Ft, p = 8, n = 10

$$a_n = 50000 * \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{10}$$

$\underline{a_n \approx 107946}$

10 év múlva 107946 Ft-ot kapunk kézhez.

2. Egy feladat értékcsökkenésre: Vásároltunk egy gépkocsit 2 000 000 Ft-ért. Mennyit ér az autónk 10 év múlva, ha értéke minden évben az előző érték 12%-ával csökken?

$$a_n = a_0 * \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

a_0 =2 000 000 Ft, p = 12, n = 10

$$a_n = 2\,000\,000 * \left(1 - \frac{12}{100}\right)^{10}$$

$\underline{a_n \approx 557000}$

10 év múlva az autónk 557 000 Ft-ot ér.

220. Átlag (számtani közép) kiszámítása

Az a_1, a_2, a_3, . . . , a_n számok átlaga (számtani közepe):

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}}{\mathbf{n}}$$

Példa:

A személygépkocsiban egy 17, egy 23, egy 30 és egy 38 éves ember utazik. Mennyi az autóban ülők átlag-életkora?

$$A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4}$$

$$A = \frac{17 + 23 + 30 + 38}{4}$$

$$A = 27$$

Az autóban utazók átlagéletkora 27 év